/ /

مشتقة الضرب: $\frac{d}{dx}[f(x)\cdot g(x)] = f(x)g(x) + g(x)f'(x)$ ⇐ مشتقة الأولى × الثانية + مشتقة الثانية × الأولى

مشتقة القسمة: $\frac{\text{المقام} \times \text{مشتقة البسط} - \text{البسط} \times \text{مشتقة المقام}}{(\text{المقام})^2}$ ⇐ $\frac{d}{dx}\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right] = \frac{g(x)f'(x) - f(x)g'(x)}{[g(x)]^2}$

مشتقة الجذر التربيعي: $f'(x) = \frac{\text{مشتقة ما تحت الجذر}}{2 \times \text{الجذر}}$ ⇐ مثال $f(x) = \sqrt{5x^2-9}$ ⇐ $f'(x) = \frac{\cancel{10}x}{\cancel{2}\sqrt{5x^2-9}} = \frac{5x}{\sqrt{5x^2-9}}$

مشتقة القوس: $f(x) = n(\text{القوس})^x$ ⇐ $f'(x) = xn(\text{القوس})^{x-1}\cdot(\text{مشتقة ما بداخل القوس})$

مراجعة على الاشتقاق:

$f(x) = 3x^5$
$f'(x) = 15x^4$

$f(x) = (5x^2+3x+8)^7$
$f'(x) = 7(5x^2+3x+8)^6(10x+3)$

$f(x) = \sqrt[3]{2x^3+5}$
$f(x) = (2x^3+5)^{\frac{1}{3}}$
$f'(x) = \frac{1}{3}(2x^3+5)^{\frac{-2}{3}}(6x^2)$

$f(x) = \sqrt{5x^2-9}$
$f(x) = (5x^2-9)^{\frac{1}{2}}$
$f'(x) = \frac{1}{2}(5x^2-9)^{-\frac{1}{2}}(10x)$
$f'(x) = \frac{\cancel{10}x}{\cancel{2}(5x^2-9)^{\frac{1}{2}}}$
$f'(x) = \frac{5x}{\sqrt{5x^2-9}}$

حل آخر: $f'(x) = \frac{\cancel{10}x}{\cancel{2}\sqrt{5x^2-9}}$ → $f'(x) = \frac{5x}{\sqrt{5x^2-9}}$

• مراجعة على بعض مفاهيم إيجاد مجال الدالة جبرياً:

مجال الدالة النسبية ⇐ اصفار المقام / مجال المقام ∩ مجال البسط

$|x| \geq a$
$x \geq a$ or $x \leq -a$

$|x| \leq a$
$-a \leq x \leq a$

$\sqrt{x^2} = |x|$
$\sqrt{x^2} = \pm x$

مثال ٣: $f_1(x)=|x|$ ، $f_2(x)=x+1$

هل $[f_2\circ f_1](x)$ تمثل دالة؟

الحل

مدى $f_1(x) = [0,\infty)$

مجال $f_2(x) = R$

مدى $f_1(x) \subset$ مجال $f_2(x)$

∴ $[f_2\circ f_1](x)$ تمثل دالة

مثال ٤: $f(x)=x^2-1$ ، $g(x)=\sqrt{x}$

أي مما يأتي تمثل دالة $[f\circ g](x)$, $[g\circ f](x)$

① $[g\circ f](x)$

مدى $f(x) = [-1,\infty)$

مجال $g(x) = [0,\infty)$

مدى $f(x) \not\subset$ مجال $g(x)$

∴ $[g\circ f](x)$ ليست دالة

② $[f\circ g](x)$

مدى $g(x) = [0,\infty)$

مجال $f(x) = R$

مدى $g(x) \subseteq$ مجال $f(x)$

∴ $[f\circ g](x)$ تمثل دالة

مثال ٥: $y=12z^{\frac{-2}{3}}-1$, $z=6x+5$

أوجد $\frac{dy}{dx}$

الحل $f(x)=12x^{\frac{-2}{3}}-1$, $g(x)=6x+5$

$(f\circ g)=f[g(x)]$

$=f[6x+5]$

$=12(6x+5)^{\frac{-2}{3}}-1$

$(f\circ g)'(x)=\frac{-2}{3}\cdot 12(6x+5)^{\frac{-5}{3}}(6)$

$(f\circ g)'(x)=\frac{-48}{\sqrt[3]{(6x+5)^5}}$

حل آخر

$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{dz}\cdot\frac{dz}{dx}$

$\frac{dy}{dx}=-8z^{\frac{-5}{3}}(6)$

$\frac{dy}{dx}=-48(6x+5)^{\frac{-5}{3}}$

$=\frac{-48}{\sqrt[3]{(6x+5)^5}}$

مثال ٤: $f(x)=10x+3$, $g(x)=\sqrt[3]{x}$ فأوجد $[f\circ g]'(x)$ ثم أوجد $[f\circ g]'(2\sqrt{2})$

الحل

$[f\circ g](x)=f[g(x)]$

$=f[\sqrt[3]{x}]$

$=10\sqrt[3]{x}+3$

$=10x^{\frac{1}{3}}+3$

$[f\circ g]'(x)=\frac{10}{3}x^{\frac{-2}{3}}$

$=\frac{10}{3\sqrt[3]{x^2}}$

$[f\circ g]'(2\sqrt{2})=\frac{10}{3\sqrt[3]{(2\sqrt{2})^2}}=\frac{10}{3\sqrt[3]{4(2)}}$

$=\frac{10}{3\sqrt[3]{8}}=\frac{10}{3(2)}=\frac{10}{6}$

$=\frac{5}{3}$

حل ٢

$f'(x)=10$ $g'(x)=\frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$

$[f\circ g]'(x)=[f'\circ g]\cdot g'(x)$

$=f'[g(x)]\cdot g'(x)$

$=f'[\sqrt[3]{x}]\cdot\left[\frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}\right]$

$=\frac{10}{3\sqrt[3]{x^2}} \Rightarrow [f\circ g]'(2\sqrt{2})=\frac{10}{3\sqrt[3]{(2\sqrt{2})^2}}=\frac{10}{3(2)}=\frac{5}{3}$

/ /

مثال 5: $y=x^2$, $z=y^3-2y+1$ أوجد $\frac{dz}{dx}$ عند $x=1$

$$\frac{dz}{dx}=\frac{dz}{dy}\cdot\frac{dy}{dx}$$

$$=3y^2-2\,(2x)$$

$$=\left[3(x^2)^2-2\right](2x)$$

$$=3x^4-2\,(2x)$$

$$=6x^5-4x$$

$$\left(\frac{dz}{dx}\right)_{x=1}=6(1)^5-4(1)=6-4=2$$

مثال 6: $y=\sqrt{x}-3$, $z=y^3$ أوجد $\frac{dz}{dx}$ عندما $x=25$

$$\frac{dz}{dx}=\frac{dz}{dy}\cdot\frac{dy}{dx}$$

$$=3y^2\left(\frac{1}{2\sqrt{x}}\right)$$

$$=\left[3\left(\sqrt{x}-3\right)^2\right]\left(\frac{1}{2\sqrt{x}}\right)$$

$$=\frac{3(\sqrt{x}-3)^2}{2\sqrt{x}}$$

$$\boxed{\left(\frac{dz}{dx}\right)_{x=25}}=\frac{3(\sqrt{25}-3)^2}{2\sqrt{25}}$$

$$=\frac{4}{5}$$

تدريب: أوجد $\frac{dy}{dx}$ إذا كانت:

a) $y=\frac{3}{z+1}$, $z=3x^2-4$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{dz}\cdot\frac{dz}{dx}$$

$$=\frac{(z+1)(0)-3(1)}{(z+1)^2}\cdot 6x$$

$$=\frac{-3}{(z+1)^2}\cdot 6x$$

$$=\frac{-18x}{\left[(3x^2-4)+1\right]^2}$$

$$=\frac{-18x}{(3x^2-4)^2+2(3x^2-4)+1}$$

$$=\frac{-18x}{9x^4-24x^2+16+6x^2-8+1}$$

$$=\frac{-18x}{9x^4-18x^2+9}$$

b) $y=\sqrt{z}$, $z=1-4x^2$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{dz}\cdot\frac{dz}{dx}$$

$$=\frac{1}{2\sqrt{z}}\,(0-8x)$$

$$=\frac{-8x}{\cancel{2}\sqrt{z}}=\frac{-4x}{\sqrt{z}}$$

$$=\frac{-4x}{\sqrt{1-4x^2}}$$

$(f \circ g)_x = (x^3+1)$

$f \qquad g$

مثال ٦: $Z=y^3$ أوجد $\frac{dy}{dx}$

$$\frac{dz}{dx}=\frac{dz}{dy}\cdot\frac{dy}{dx}$$

$$\frac{dz}{dx}=(3y^2)\left(\frac{dy}{dx}\right)$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dz}{dx}(3y^2)^{-1}$$

مثال ٧: أوجد $\frac{dy}{dx}$ في كل مما يأتي

a) $x^2+y^2=9$

$$2x+2yy'=0$$

$$\frac{2yy'}{2y}=\frac{-2x}{2y}$$

$$y'=\frac{-x}{y}$$

b) $\sqrt{x}+\sqrt{y}=4$

$$\frac{1}{2\sqrt{x}}+\frac{1}{2\sqrt{y}}\cdot y'=0$$

$$2\sqrt{y}\times\frac{y'}{2\sqrt{y}}=\frac{-1}{2\sqrt{x}}\times 2\sqrt{y}$$

$$y'=\frac{-2\sqrt{y}}{2\sqrt{x}}$$

$$y'=\frac{-\sqrt{y}}{\sqrt{x}}=-\sqrt{\frac{y}{x}}$$

c) $3x+x^2y-5y^2=0$

$$3+x^2y'+2yx-10yy'=0$$

$$x^2y'-10yy'=-2yx-3$$

$$y'(x^2-10y)=-2yx-3$$

$$y'=\frac{-(2xy+3)}{-(-x^2+10y)}$$

$$y'=\frac{2xy+3}{10y-x^2}$$

مثال: $y=Z^{10}$, $Z=x^3+1$ أوجد $\frac{dy}{dx}$

$$f=Z^{10}\Rightarrow f'(x)=10x^9$$

$$g=x^3+1\Rightarrow g'(x)=3x^2$$

$$(f\circ g)'(x)=f'[g(x)]\cdot g'(x)$$

$$=f'[x^3+1]\cdot 3x^2$$

$$=\left[10(x^3+1)^9\right]3x^2$$

$$=30x^2(x^3+1)^9$$

مثال ٨: أوجد $\frac{dy}{dx}$

a) $y=(15x^3-7x^2+2)^9$

$$\frac{dy}{dx}=9(15x^3-7x^2+2)(45x^2-14x)$$

b) $y=\sqrt{x^3-5}$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{3x^2}{2\sqrt{x^3-5}}$$

c) $y=\frac{1}{(2x^2-1)^5}$

$$\frac{dy}{dx}=-5(2x^2-1)^{-6}(4x)$$

$$=\frac{-20x}{(2x^2-1)^6}$$

مثال ٩: أوجد $\frac{dy}{dx}$ ، $y=(2x+7)^5(4x-1)^3$

$$\frac{dy}{dx}=(2x+7)^5\left[3(4x-1)^2(4)\right]+(4x-1)^3\left[5(2x+7)^4(2)\right]$$

$$\frac{dy}{dx}=12(4x-1)^2(2x+7)^5+10(2x+7)^4(4x-1)^3$$

$$=2(4x-1)^2(2x+7)^4\left[6(2x+7)+5(4x-1)\right]$$

$$=2(4x-1)^2(2x+7)^4\left[12x+42+20x-5\right]$$

$$=2(4x-1)^2(2x+7)^4(32x+37)$$

/ /

مثال 12: أوجد $\frac{dy}{dx}$ لـ $4x^2+xy-3y^2=0$ عند النقطة $(-2,2)$

$8x+xy'+y-6yy'=0$

$xy'-6yy'=-y-8x$

$y'(x-6y)=-y-8x$

$y'=\frac{y+8x}{6y-x}$

$\left(\frac{dy}{dx}\right)_{(-2,2)}=\frac{2+8(-2)}{6(2)+2}$

$=\frac{2-16}{12+2}=\frac{-14}{14}=-1$

تدريب 2 أوجد $\frac{dy}{dx}$ في كل مما يأتي:

a) $y^2+3xy=10$ عند النقطة $(1,2)$

$2yy'+3[xy'+y]=0$

$2yy'+3xy'+3y=0$

$y'(2y+3x)=-3y$

$y'=\frac{-3y}{2y+3x}$

$\left(\frac{dy}{dx}\right)_{(1,2)}=\frac{-3(2)}{2(2)+3(1)}$

$=\frac{-6}{7}$

b) $4x^2+9y^2=40$ عند النقطة $(1,2)$

$8x+18yy'=0$

$18yy'=-8x$

$y'=\frac{-8x}{18y}=\frac{-4x}{9y}$

$\left(\frac{dy}{dx}\right)_{(1,2)}=\frac{-4(1)}{9(2)}=\frac{-4}{18}=\frac{-2}{9}$

c) $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ حيث a,b ثوابت

$\frac{1}{a^2}\cdot x^2+\frac{1}{b^2}\cdot y^2=1$

$\frac{2}{a^2}x+\frac{2}{b^2}yy'=0$

$\frac{\cancel{b^2}}{\cancel{2y}}\times\frac{\cancel{2y}y'}{\cancel{b^2}}=\frac{\cancel{2}x}{a^2}\times\frac{b^2}{\cancel{2}y}$

$y'=\frac{b^2x}{a^2y}$

d) $x^2-2xy+y^2=16$ عند النقطة $(-1,3)$

$2x-2[xy'+y]+2yy'=0$

$2x-2xy'-2y+2yy'=0$

$-2xy'+2yy'=2y-2x$

$y'(-2x+2y)=2y-2x$

$y'=\frac{2y-2x}{-2x+2y}=1$

$\left(\frac{dy}{dx}\right)_{(-1,3)}=1$

مثال 13: $f(x)=x^2+5x$, $g(x)=\sqrt{3x+7}$ أوجد $[g\circ f]'(1)$

$[g\circ f]'(x)=g'[f(x)]\cdot f'(x)$

$=g'[x^2+5x]\cdot 2x+5$

$=\left[\sqrt{3(x^2+5x)+7}\right](2x+5)$

$=\left(\sqrt{3x^2+15x+7}\right)(2x+5)$

$[g\circ f]'(1)=\left(\sqrt{3(1)^2+15(1)+7}\right)(2(1)+5)$

$=\sqrt{25}\,(7)=35$

/ /

مثال 14: $g'(x) = \sec^2 x,\ h(x) = 3x$

فأ،جـ $[g \circ h]'\left(\frac{\pi}{3}\right)$

$[g \circ h]'(x) = g'[h(x)] \cdot h'(x)$

$= g'[3x] \cdot 3$

$= (\sec^2 3x)(3)$

$= 3\sec^2 3x$

$[g \circ h]'\left(\frac{\pi}{3}\right) = 3\sec^2 \cancel{3}\left(\frac{\pi}{\cancel{3}}\right)$

$= 3\sec^2 \pi$

$= 3 \cdot \frac{1}{\cos^2 180^\circ}$

$= 3 \times \frac{1}{(-1)^2} = 3$

تمارين

(1) إ،ذ $g(x) = 2x^3,\ f(x) = x + 3$

$[f \circ g]'(x)$ عند $x = 1$

$[f \circ g](x) = f[g(x)]$

$= f[2x^3]$

$= 2x^3 + 3$

$[f \circ g]'(x) = 6x^2$

$[f \circ g]'(1) = 6(1)^2 = 6$

(2) إ،ذ $g(x) = x^3,\ f = \sqrt[3]{x}$

$[f \circ g]'(x)$

$[f \circ g] = f[g(x)]$

$= f[x^3]$

$= \sqrt[3]{x^3}$

$= x$

$[f \circ g]'(x) = 1$

(3) إ،ذ $g'(x) = \sin x,\ h(x) = 2x$

$[g \circ h]'\left(\frac{\pi}{6}\right)$

$[g \circ h]'(x) = g'[h(x)] \cdot h'(x)$

$= g'[2x] \cdot 2$

$= 2\sin 2x$

$[g \circ h]'\left(\frac{\pi}{6}\right) = 2\sin \cancel{2}\left(\frac{\pi}{\cancel{6}_3}\right)$

$= 2\sin\frac{\pi}{3} = 2\sin 60^\circ$

$= \cancel{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{\cancel{2}} = \sqrt{3}$

(4) أ،جـ $\frac{dy}{dx}$ في كل مما يأتي

a) $y = (7 + 3x)^5$

$\frac{dy}{dx} = 5(7+3x)^4(-3)$

$= -15(7+3x)^4$

b) $y = (x^3 + 3x^2 + 2)^7$

$\frac{dy}{dx} = 7(x^3 + 3x^2 + 2)^6(3x^2 + 6x)$

c) $y = \frac{1}{(x^3 - 3x^2)^3},\ x = 1$

$\frac{dy}{dx} = -3(x^3 - 3x^2)^{-4}(3x^2 - 6x)$

$= \frac{-3(3x^2 - 6x)}{(x^3 - 3x^2)^4}$

$\left(\frac{dy}{dx}\right)_{x=1} = \frac{-3(3(1)^2 - 6(1))}{((1)^3 - 3(1)^2)^4} = \frac{9}{16}$

/ /

$$y=\left(\frac{x}{x+1}\right)^8 \quad (g$$

$$\frac{dy}{dx}=8\left(\frac{x}{x+1}\right)^7\left(\frac{\cancel{x}+1-\cancel{x}}{(x+1)^2}\right)$$

$$=8\left(\frac{x}{x+1}\right)^7\left(\frac{1}{(x+1)^2}\right)$$

حل آخر

$$y=(1+x)^8$$
$$y'=8(1+x)^7(0+1)$$
$$y'=8(1+x)^7$$

حل آخر

$$y=\frac{x^8}{(x+1)^8}$$

$$y'=\frac{(x+1)^8(8x^7)-x^8[8(x+1)^7(1)]}{(x+1)^{16}}$$

$$y'=\frac{8x^7(x+1)^8-8x^8(x+1)^7}{(x+1)^{16}}$$

⑤ $y=(1-2x+x^2)^8$ ، نثبت أن: $\frac{dy}{dx}(1-x)+16y=0$

$$y'=8(1-2x+x^2)^7(0-2+2x)$$
$$y'=8(-2+2x)(1-2x+x^2)^7$$
$$y'=(-16+16x)(1-2x+x^2)^7$$
$$\frac{dy}{dx}(1-x)=(1-x)(+16x-16)(1-2x+x^2)^7$$
$$=16x-16-16x^2+16x(1-2x+x^2)^7$$
$$=(-16x^2+32x-16)(1-2x+x^2)^7$$
$$=-16(x^2-2x+1)(1-2x+x^2)^7$$
$$=-16(1-2x+x^2)^8$$
$$=-16y$$

$$LHS=\frac{dy}{dx}(1-x)+16y$$
$$=-16y+16y$$
$$=0$$

LHS = RHS

$$y=z^5,\ z=x^2+7,\ x=2 \quad (d$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{dz}\cdot\frac{dz}{dx}$$
$$=5z^4(2x)$$
$$=5(x^2+7)^4(2x)$$
$$=10x(x^2+7)^4$$
$$\left(\frac{dy}{dx}\right)_{x=2}=10(2)(2^2+7)^4$$
$$=20(11)^4$$
$$=292820$$

حل آخر

$$f(x)=z^5$$
$$g(x)=x^2+7$$
$$[f\circ g](x)=f[g(x)]$$
$$=f[x^2+7]$$
$$=(x^2+7)^5$$
$$[f\circ g]'(x)=5(x^2+7)^4(2x)$$
$$=10x(x^2+7)^4$$
$$\left(\frac{dy}{dx}\right)_{x=2}=292820$$

$$y=(x-1)^4(x+1)^6 \quad (e$$
$$y'=(x-1)^4[6(x+1)^5]+(x+1)^6[4(x-1)^3]$$
$$y'=6(x-1)^4(x+1)^5+4(x+1)^6(x-1)^3$$
$$y'=2(x-1)^3(x+1)^5[3(x-1)+2(x+1)]$$
$$y'=2(x-1)^3(x+1)^5(3x-3+2x+2)$$
$$y'=2(x-1)^3(x+1)^5(5x-1)$$

$$y=\frac{-1}{z},\ z=x^3+x^2 \quad (f$$
$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{dz}\cdot\frac{dz}{dx}$$
$$=\frac{1}{z^2}\cdot 3x^2+2x$$
$$=\frac{3x^2+2x}{x^3+x^2}=\frac{\cancel{x}(3x+2)}{\cancel{x}(x^2+x)}$$
$$=\frac{3x+2}{x^2+x}$$

/ /

$= 6x^5 - 27x^2$

$\frac{dz}{dx} = 3x^2$

$9\left(\frac{dz}{dx}\right) = 27x^2$

$LHS = \cancel{6x^5} - \cancel{27x^2} + \cancel{27x^2} - \cancel{6x^5}$

$= 0$

$LHS = RHS$

$y = (3x^2-2)^3(5x-7)$ ⑧

جد $\frac{dy}{dx}$ عند النقطة $(1,-2)$

$\frac{dy}{dx} = (3x^2-2)^3[5] + (5x-7)\left[3(3x^2-2)^2(6x)\right]$

$= 5(3x^2-2)^3 + 18x(5x-7)(3x^2-2)^2$

$\left(\frac{dy}{dx}\right)_{(1,-2)} = 5(3-2)^3 + 18(5-7)(3-2)^2$

$= 5 - 36 = \underline{-31}$

⑨ $\frac{dy}{dx}$ جد إذا $y = \sqrt[3]{(x^2-3x-4)^2}$

$y = (x^2-3x-4)^{\frac{2}{3}}$

$\frac{dy}{dx} = \frac{2}{3}(x^2-3x-4)^{\frac{-1}{3}}(2x-3)$

$= \frac{2(2x-3)}{\sqrt[3]{x^2-3x-4}} = \frac{4x-6}{\sqrt[3]{x^2-3x-4}}$

⑩ جد $\frac{d}{dx}\left(\sqrt[3]{x^2+4}\right)$ عند $x = \sqrt{5}$

$y = \sqrt[3]{x^2+4}$

$y = (x^2+4)^{\frac{1}{3}}$

$y' = \frac{1}{3}(x^2+4)^{\frac{-2}{3}}(2x)$

$y' = \frac{2x}{\sqrt[3]{(x^2+4)^2}}$

حل ٣ م

$y = (1-2x+x^2)^8$

$y = [(x-1)^2]^8$

$y = (x-1)^{16}$

$\frac{dy}{dx} = 16(x-1)^{15}(1) = 16(x-1)^{15}$

$\frac{dy}{dx}(1-x) = 16(x-1)^{15}(1-x)$

$= 16(x-1)^{15}[-(-1+x)]$

$= -16(x-1)^{16}$

$= -16y$

$LHS = -16y + 16y = 0$

$LHS = RHS$

⑥ إذا $4y = (x^2-a)^2$ ، a ثابت

فأثبت أن $\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 - 4x^2y = 0$

$y = \frac{(x^2-a)^2}{4}$

$y' = \frac{\cancel{2}(x^2-a)(\cancel{2}x)}{\cancel{4}}$

$y' = (x^2-a)x$

$y'^2 = (x^2-a)^2x^2$

$y'^2 = 4yx^2$

$LHS = 4yx^2 - 4x^2y = 0$

$LHS = RHS$

⑦ $y = z^2 - 7z + 3$, $z = x^3 - 1$

فأثبت أن $\frac{dy}{dx} + 9\frac{dz}{dx} - 6x^5 = 0$

$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dz} \cdot \frac{dz}{dx}$

$= 2z - 7(3x^2)$

$= [2(x^3-1) - 7](3x^2)$

$= [2x^3 - 2 - 7](3x^2)$

/ /

11) أوجد $\frac{dy}{dx}$ في كل مما يأتي:

a) $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=2$

$\frac{1}{y}=2-\frac{1}{x}$

$\frac{1}{y}=\frac{2x-1}{x}$

$y=\frac{x}{2x-1}$

$y'=\frac{(2x-1)-2x}{(2x-1)^2}$

$y'=\frac{-1}{(2x-1)^2}$

b) $\frac{x}{y}-4y=x$

$\frac{x}{\cancel{y}}\cdot\cancel{y}-4y\cdot y=x\cdot y$

$x-4y^2=xy$

$1-8yy'=xy'+y$

$-8yy'-xy'=y-1$

$y'(-8y-x)=y-1$

$y'=\frac{y-1}{-8y-x}$

حل آخر

$xy^{-1}-4y=x$

$x(-y^{-2}y')+y^{-1}-4y'=1$

$\cancel{y^2}\cdot\frac{-xy'-4y'y^2}{\cancel{y^2}}=\left(1-\frac{1}{y}\right)y^2$

$y'(-x-4y^2)=y^2-y$

$y'=\frac{y^2-y}{-x-4y^2}$

c) $\sqrt{xy^2+yx^2}=1$

$\left(\sqrt{xy^2+yx^2}\right)^2=(1)^2$

$xy^2+yx^2=1$

$x(2yy')+y^2+y(2x)+x^2y'=0$

$2yy'x+x^2y'=-y^2-2yx$

$y'(2yx+x^2)=-y^2-2yx$

$y'=\frac{-y^2-2yx}{2yx+x^2}$

d) $y+\sqrt{xy}=3x^2$

$y'+\frac{xy'+y}{2\sqrt{xy}}=6x$

$y'\cdot 2\sqrt{xy}+\frac{xy'+y}{\cancel{2\sqrt{xy}}}\cdot\cancel{2\sqrt{xy}}=6x(2\sqrt{xy})$

$2y'\sqrt{xy}+xy'+y=12x\sqrt{xy}$

$y'(2\sqrt{xy}+x)=12x\sqrt{xy}-y$

$y'=\frac{12x\sqrt{xy}-y}{2\sqrt{xy}+x}$

12) في $x^2+2y^2+4x-12y+11=0$ أوجد النقاط التي يكون عندها $\frac{dy}{dx}=\frac{-3}{2}$:

$2x+4yy'+4-12y'=0$

$y'(4y-12)=-2x-4$

$y'=\frac{-2x-4}{4y-12}$

$\because \frac{dy}{dx}=\frac{-3}{2} \Rightarrow \therefore \frac{-2x-4}{4y-12}=\frac{-3}{2}$

$(4y-12)=\frac{2(-2x-4)}{-3}$

$4y=\frac{-4x-8}{-3}+\frac{12(-3)}{-3} \Rightarrow 4y=\frac{-4x-44}{-3}$

$y=\frac{\frac{4(-x-11)}{-3}}{4} \Rightarrow y=\frac{\cancel{4}(-x-11)}{\cancel{-12}_{3}}$

$y=\frac{-x-11}{-3} \Rightarrow y=\frac{x+11}{3}$

/ /

إذا $y^3+2x^2y-3xy^2=0$ (13)

$\frac{dy}{dx}$ عند النقطة $(1,1)$

$3y^2y'+2\left[x^2y'+y(2x)\right]-3\left[x(2yy')+y^2\right]=0$

$3y^2y'+2x^2y'+4yx-6xyy'-3y^2=0$

$y'(3y^2+2x^2-6xy)=-4yx+3y^2$

$y'=\frac{-4yx+3y^2}{3y^2+2x^2-6xy}$

$y'=\frac{-4(1)(1)+3(1)^2}{3(1)^2+2(1)^2-6(1)(1)}=\frac{-4+3}{3+2-6}=1$

$\frac{y(y^2+2x^2-3xy)}{y}=\frac{0}{y}$

$y^2+2x^2-3xy=0$

$2yy'+4x-3\left[xy'+y\right]=0$

$2yy'+4x-3xy'-3y=0$

$y'(2y-3x)=-4x+3y$

$y'=\frac{-4x+3y}{2y-3x}$

$y'=\frac{-4(1)+3(1)}{2(1)-3(1)}=\frac{-4+3}{2-3}=\frac{-1}{-1}=1$

إذا $y^2-3x^2+2x=0$ أثبت أن (14)

$y^2\left(\frac{dy}{dx}\right)^2-(3x-1)^2=0$

$2yy'-6x+2=0$

$2yy'=6x-2$

$y'=\frac{6x-2}{2y}=\frac{\cancel{2}(3x-1)}{\cancel{2}y}=\frac{(3x-1)}{y}$

$(y')^2=\frac{(3x-1)^2}{y^2}$

$LHS=\cancel{y^2}\left[\frac{(3x-1)^2}{\cancel{y^2}}\right]-(3x-1)^2$

$=(3x-1)^2-(3x-1)^2$

$=0$

$LHS=RHS$

$y=\frac{x+11}{3} \Rightarrow x+11=3y$

$\boxed{x=3y-11}$

$(3y-11)^2+2y^2+4(3y-11)-12y+11=0$

$9y^2-66y+121+2y^2+\cancel{12y}-44\cancel{-12y}+11=0$

$11y^2-66y+88=0$

$(y-4)(y-2)=0$

$y=4$ or $y=2$

$x=3(4)-11$ | $x=3(2)-11$

إذاً $x=1$ | $x=-5$

$(1,4)$ | $(-5,2)$

$f(x) = e^{x} \longrightarrow f'(x) = e^{x}$

c) $(x-y)^2 = x+y-1$

$x^2 - 2xy + y^2 = x + y - 1$

$2x - 2[xy' + y] + 2yy' = 1 + y'$

$2x - 2xy' - 2y + 2yy' = 1 + y'$

$-2xy' + 2yy' - y' = 1 + 2y - 2x$

$y'(-2x + 2y - 1) = 1 + 2y - 2x$

$y' = \dfrac{1 + 2y - 2x}{-2x + 2y - 1}$

$y' = \dfrac{2y - 2x + 1}{2y - 2x - 1}$

d) $y = x^2y^3 + x^3y^2$

$y' = x^2(3y^2y') + y^3(2x) + x^3(2yy') + y^2(3x^2)$

$y' = 3x^2y^2y' + 2xy^3 + 2yy'x^3 + 3x^2y^2$

$y' - 3x^2y^2y' - 2yy'x^3 = 2xy^3 + 3x^2y^2$

$y'(1 - 3x^2y^2 - 2yx^3) = 2xy^3 + 3x^2y^2$

$y' = \dfrac{2xy^3 + 3x^2y^2}{1 - 3x^2y^2 - 2yx^3}$

e) $e^{xy} = e^{4x} - e^{5y}$

$(xy' + y)e^{xy} = 4e^{4x} - 5y'e^{5y}$

$xy'e^{xy} + ye^{xy} = 4e^{4x} - 5y'e^{5y}$

$xy'e^{xy} + 5y'e^{5y} = 4e^{4x} - ye^{xy}$

$y'(xe^{xy} + 5e^{5y}) = 4e^{4x} - ye^{xy}$

$y' = \dfrac{4e^{4x} - ye^{xy}}{xe^{xy} + 5e^{5y}}$

15) $y^2 = ax^2 - a^2$ ، a عدد ثابت (حقيقي) أثبت أن:

$\dfrac{y^2}{x^2}\left(\dfrac{dy}{dx}\right)^2 - xy\left(\dfrac{dy}{dx}\right) + y^2 = 0$

$\dfrac{2yy'}{2y} = \dfrac{2ax}{2y}$

$y' = \dfrac{ax}{y} \Rightarrow (y')^2 = \dfrac{a^2x^2}{y^2} = \dfrac{(ax)^2}{y^2}$

$LHS = \dfrac{y^2}{x^2} \cdot \dfrac{a^2x^2}{y^2} - xy \cdot \dfrac{ax}{y} + y^2$

$= a^2 - ax^2 + y^2$

$= -(-a^2 + ax^2) + y^2$

$= -y^2 + y^2$

$= 0$

$LHS = RHS$

مثال: أوجد $\dfrac{dy}{dx}$ للعلاقات الآتية:

a) $x^2 + y^2 = 25$

$2x + 2yy' = 0$

$2(x + yy') = 0$

$x + yy' = 0$

$yy' = -x$

$y' = \dfrac{-x}{y}$

b) $x^3 + y^3 = 4$

$3x^2 + 3y^2y' = 0$

$3(x^2 + y^2y') = 0$

$x^2 + y^2y' = 0$

$y^2y' = -x^2$

$y' = \dfrac{-x^2}{y^2} = -\left(\dfrac{x}{y}\right)^2$

$f(x) = e^{g(x)}$

مهم $f'(x) = g'(x)\, f(x)$

$f'(x) = g'(x) \cdot e^{g(x)}$

مثال $= e^{2x}$ $\quad f(x) = e^{3x^2}$

المشتقة $= 2e^{2x}$ $\quad f'(x) = 6x\, e^{3x^2}$

/ /

مشتقات الدوال المثلثية

$\lim_{x\to0}\frac{1-\cos x}{x}=0$ * $\lim_{x\to0}\frac{\tan x}{x}=1$ * $\lim_{x\to0}\frac{\sin x}{x}=1$ *

$f(x)=\sin 3x \Rightarrow f'(x)=\cos 3x\,[3]$ *

مشتقة الزاوية X مشتقة الدالة المثلثية

مثال:

a) $\lim_{x\to0}\frac{\sin 5x}{x}$

b) $\lim_{x\to0}\frac{x+\sin 2x}{x}$

الحل

a) $5\lim_{5x\to0}\frac{\sin 5x}{5x}$

$5(1)=5$

b) $\lim_{x\to0}\frac{x}{x}+\lim_{x\to0}\frac{\sin 2x}{x}$

$\lim_{x\to0}1+2\lim_{2x\to0}\frac{\sin 2x}{2x}$

$1+2(1)=3$

مثال: $\lim_{x\to0}\frac{\tan 3x}{x}$

$3\lim_{3x\to0}\frac{\tan 3x}{3x}$

$3(1)=3$

مثال 3: أثبت أن

$\lim_{x\to0}\frac{2x+1-\cos x}{3x}=\frac{2}{3}$

$LHS=\lim_{x\to0}\frac{2x}{3x}+\lim_{x\to0}\frac{1-\cos x}{3x}$

$\lim_{x\to0}\frac{2}{3}+\frac{1}{3}\lim_{x\to0}\frac{1-\cos x}{x}$

$\frac{2}{3}+(\frac{1}{3})(0)=\frac{2}{3}=RHS$

$f(x)$	$f'(x)$ *
$\sin x$	$\cos x$
$\cos x$	$-\sin x$
$\tan x$	$\sec^2 x$
$\cot x$	$-\csc^2 x$
$\sec x$	$\sec x\tan x$
$\csc x$	$-\csc x\cot x$

مثال: a) $y=\sin(2x+\pi),\ x=\frac{\pi}{2}$ b) $y=x\sin\sqrt{x},\ x=\frac{\pi^2}{4}$

الحل

a) $\frac{dy}{dx}=\cos(2x+\pi)[2]$

$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=\frac{\pi}{2}}=2\cos\left(2(\frac{\pi}{2})+\pi\right)$

$=2\cos 2\pi=2(1)=2$

b) $\frac{dy}{dx}=x\cos\sqrt{x}(\frac{1}{2\sqrt{x}})+\sin\sqrt{x}$

$=\frac{x}{2\sqrt{x}}\cos\sqrt{x}+\sin\sqrt{x}$

$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=\frac{\pi^2}{4}}=\frac{\frac{\pi^2}{4}}{2\sqrt{\frac{\pi^2}{4}}}\cos\sqrt{\frac{\pi^2}{4}}+\sin\sqrt{\frac{\pi^2}{4}}$

$=\frac{\pi^2/4}{\pi}\cos\frac{\pi}{2}+\sin\frac{\pi}{2}$

$=\frac{\pi}{4}(0)+1=1$

مثال 6: جد $f'(0)$ إذا $f(x)=2x^2\tan 2x$

$f'(x)=2x^2(2\sec^2 2x)+\tan 2x(4x)$

$=4x^2\sec^2 2x+4x\tan 2x$

$f'(0)=4(0)\sec^2 0+4(0)\tan 0$

$=0$

مثال 5: $f(x)=\cos\frac{1}{2}x$

أوجد $f'(\frac{\pi}{2})$

$f'(x)=-\sin\frac{x}{2}(\frac{1}{2})$

$f'(\frac{\pi}{2})=\frac{-1}{2}\sin\frac{\frac{\pi}{2}}{2}$

$=\frac{-1}{2}\sin\frac{\pi}{4}$

$=\frac{-1}{2}(\frac{\sqrt{2}}{2})=\frac{-\sqrt{2}}{4}$

مثال 4: $f'(\frac{\pi}{12})$ إذا كان $f(x)=\sec^4(3x)$

$f'(x)=4(\sec 3x)^3[3\sec 3x\tan 3x]$

$f'(x)=12\sec^4 3x\tan 3x$

$f'(\frac{\pi}{12})=12\sec^4(3\times\frac{\pi}{12})\tan 3\times\frac{\pi}{12}$

$=12\left(\frac{1}{\cos 45}\right)^4\tan 45$

$=48$

تمرين: أوجد $f'(x)$

a) $f(x)=\sin^2 3x$

b) $f(x)=\cos x^3$

c) $f(x)=x\tan x$

الحل

a) $f(x)=(\sin 3x)^2$

$f'(x)=2(\sin 3x)(3\cos 3x)$

$=6\sin 3x\cos 3x$

b) $f'(x)=-3x^2\sin x^3$

c) $f'(x)=x\sec^2 x+\tan x$

مثال ٨: $f(x)=x^5\csc x$ فأوجد $f'(x)$

$f'(x)=x^5(-\csc x\cot x)+5x^4\csc x$

$=-x^5\csc x\cot x+5x^4\csc x$

$=x^4\csc x(-x\cot x+5)$

مثال ٩: $f(x)=\cot\sqrt{x}$ فأوجد $f'\left(\frac{\pi^2}{4}\right)$

$f'(x)=-\csc^2\sqrt{x}\left(\frac{1}{2\sqrt{x}}\right)$

$=\frac{-\csc^2\sqrt{x}}{2\sqrt{x}}$

$f'\left(\frac{\pi^2}{4}\right)=\frac{-1}{\sin^2\sqrt{\frac{\pi^2}{4}}\left(2\sqrt{\frac{\pi^2}{4}}\right)}$

$=\frac{-1}{\left(\sin\frac{\pi}{2}\right)^2\pi}$

$=\frac{-1}{\pi}$

تدريب: أوجد $f'(x)$

a) $f(x)=\sec\frac{x}{3}$

b) $f(x)=x\csc 2x$

c) $f(x)=\cot\frac{\pi}{x}$

الحل

a) $f(x)=\sec\frac{1}{3}x$

$f'(x)=\frac{1}{3}\sec\frac{x}{3}\tan\frac{x}{3}$

b) $f'(x)=x(-2\csc 2x\cot 2x)+\csc 2x$

$=-2x\csc 2x\cot 2x+\csc 2x$

c) $f(x)=\cot\pi x^{-1}$

$f'(x)=-\csc^2\frac{\pi}{x}\left(\frac{-\pi}{x^2}\right)$

$f'(x)=\frac{\pi}{x^2\sin^2 90^\circ}=\frac{\pi}{x^2}$

مثال ١٠: $f(x)=x^2$ ، $g(x)=\cos x$ فأوجد $[g\circ f]'\left(\sqrt{\frac{\pi}{3}}\right)$

$[g\circ f]'(x)=g'[f(x)]\cdot f'(x)$

$=g'[x^2](2x)$

$=2x\cos x^2$

$[g\circ f]'\left(\sqrt{\frac{\pi}{3}}\right)=2\sqrt{\frac{\pi}{3}}\cos\left(\sqrt{\frac{\pi}{3}}\right)^2$

$=2\sqrt{\frac{\pi}{3}}\cos\frac{\pi}{3}=2\sqrt{\frac{\pi}{3}}\left(\frac{1}{2}\right)$

$=\sqrt{\frac{\pi}{3}}$

تدريب ٣: $f(x)=\sin 4x$ ، $g(x)=x^3$ فأوجد $[g\circ f]'\left(\frac{\pi}{16}\right)$

$[g\circ f]'(x)=g'[f(x)]\cdot f'(x)$

$=g'[\sin 4x](4\cos 4x)$

$=(\sin 4x)^3(4\cos 4x)$

$[g\circ f]\left(\frac{\pi}{16}\right)=\left(\sin 4\times\frac{\pi}{16}\right)^3\left(4\cos 4\times\frac{\pi}{16}\right)$

$=\left(\sin\frac{\pi}{4}\right)^3\left(4\cos\frac{\pi}{4}\right)$

$=\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^3\left(4\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right)$

$=2\sqrt{2}\left(\frac{2\sqrt{2}}{8}\right)=1$

التمارين ص٣٥: أوجد مشتقة كل من الدوال الآتية:

① $y=\sin 2x$

$y'=2\cos 2x$

② $f(x)=\cos(4x^2-1)$

$f'(x)=-8x\sin(4x^2-1)$

③ $f(x)=\tan\sqrt{x+1}$

$f'(x)=\sec^2\sqrt{x+1}\left(\frac{1}{2\sqrt{x+1}}\right)$

$f'(x)=\frac{\sec^2\sqrt{x+1}}{2\sqrt{x+1}}$

$y=5x\cot 5x$

$y'=5x(-\csc^2 5x(5))+5\cot 5x$

$y'=-25x\csc^2 5x+5\cot 5x$

/ /

أوجد مشتقة كل من الدوال الآتية عند قيمة x المعطاة:

⑨ $f(x) = x\cos x \;,\; x = \pi$

$f'(x) = x(-\sin x) + \cos x$

$f'(\pi) = -\pi \sin\pi + \cos\pi$

$= -\pi(0) + (-1) = -1$

⑩ $f(x) = \cot^3 x \;,\; x = \frac{\pi}{4}$

$f'(x) = 3(\cot x)^2(-\csc^2 x)$

$f'(x) = -3\cot^2 x \csc^2 x = -3\,\frac{1}{\tan^2 x}\cdot\frac{1}{\sin^2 x}$

$f'(\frac{\pi}{4}) = \frac{-3}{(\tan\frac{\pi}{4})^2(\sin\frac{\pi}{4})^2} = \frac{-3}{1\times\frac{1}{2}} = -6$

⑪ $f(x) = (\sin 2x + \cos 2x)^2 \;,\; x = \frac{3\pi}{2}$

$f(x) = (\sin 2x)^2 + 2\sin 2x\cos 2x + (\cos 2x)^2$

$f(x) = \sin^2 2x + \sin 4x + \cos^2 2x$

$f'(x) = 2(\sin 2x)(2\cos 2x) + 4\cos 4x + 2(\cos 2x)(-2\sin 2x)$

$= \cancel{4\sin 4x} + 4\cos 4x - \cancel{4\sin 4x}$

$= 4\cos 4x$

$f'(\frac{3\pi}{2}) = 4\cos \cancel{4}^{2}(\frac{3\pi}{\cancel{2}})$

$= 4\cos 6\pi$

$= 4$

⑫ $f(x) = \frac{\tan x}{x+1} \;,\; x = 0$

$f'(x) = \frac{(x+1)(\sec^2 x) - \tan x}{(x+1)^2}$

* $f'(0) = \frac{(0+1)\left(\frac{1}{(\cos 0)^2}\right) - \tan 0}{(0+1)^2} = 1$

حل آخر ⑪

$f'(x) = 2(\sin 2x + \cos 2x)(2\cos 2x - 2\sin 2x)$

$= 4(\sin 2x + \cos 2x)(-\sin 2x + \cos 2x)$

$= -4(\sin 2x + \cos 2x)(\sin 2x - \cos 2x)$

$= -4(\sin^2 2x - \cos^2 2x)$

$f'(\frac{3\pi}{2}) = -4(\sin^2 3\pi - \cos^2 3\pi) = 4$

⑤ $y = \sqrt{\sec x}$

$y' = \frac{\sec x \tan x}{2\sqrt{\sec x}}$

⑥ $f(x) = \cos 6x \csc 6x$

$f'(x) = \cos 6x(-6\csc 6x\cot 6x) + \csc 6x(-6\sin 6x)$

$f'(x) = -6\cos 6x\left(\frac{1}{\sin 6x}\right)\left(\frac{\cos 6x}{\sin 6x}\right) - 6\sin 6x\left(\frac{1}{\sin 6x}\right)$

$= -6\cot^2 6x - 6$

$= -6(\cot^2 6x + 1)$

$= -6\csc^2 6x$

حل آخر

$f(x) = \frac{\cos 6x}{\sin 6x}$

$f(x) = \cot 6x$

$f'(x) = -6\csc^2 6x$

⑦ $f(x) = 1 + \frac{1+\sin x}{\cos x}$ ؟؟

$f'(x) = \frac{\cos x(\cos x) - (1+\sin x)(-\sin x)}{(\cos x)^2}$

$f'(x) = \frac{\cos^2 x - (-\sin x - \sin^2 x)}{\cos^2 x}$

$f'(x) = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x + \sin x}{\cos^2 x}$

$f'(x) = \frac{1+\sin x}{\cos^2 x}$

$f'(x) = \sec^2 x + \tan x\sec x$

$f'(x) = \sec x(\sec x + \tan x)$

⑧ $y = \frac{\sin x}{2 + \csc x}$

$y' = \frac{(2+\csc x)(\cos x) - \sin x(-\csc x\cot x)}{(2+\csc x)^2}$

$y' = \frac{2\cos x + \cot x + \cot x}{(2+\csc x)^2}$

$y' = \frac{2\cos x + 2\cot x}{(2+\csc x)^2}$

$$f'\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{-4\left(\frac{\tan\pi}{\cos\pi}\right) - 16\left(\frac{\tan\pi}{(\cos\pi)^2}\right)}{\left(1 - \frac{2}{\cos\pi}\right)^2} = 0$$

$f(x) = \dfrac{1-\sin x}{1+\sin x}$, $x = \pi$ (15)

$$f(x) = \frac{(1-\sin x)(1-\sin x)}{(1+\sin x)(1-\sin x)} = \frac{1-2\sin x+\sin^2 x}{1-\sin^2 x}$$

$$f(x) = \frac{1-2\sin x+\sin^2 x}{\cos^2 x} = \sec^2 x - 2\tan x\sec x + \tan^2 x$$

$$f'(x) = 2(\sec x)(\sec x\tan x) - 2\tan x(\sec x\tan x)$$

$$+ \sec x(2\sec^2 x) + 2\tan x\sec^2 x$$

$$f'(\pi) = 2\left(\frac{\tan\pi}{(\cos\pi)^2}\right) - 2\left(\frac{(\tan\pi)^2}{\cos\pi}\right) + 2\left(\frac{1}{(\cos\pi)^3}\right)$$

$$+ 2\left(\frac{\tan\pi}{(\cos\pi)^2}\right) = -2$$

$f(x) = x\tan x^2$, $x = \sqrt{\pi}$ (16)

$$f'(x) = x\left[\sec^2 x^2(2x)\right] + \tan x^2 = 2x^2\sec^2 x^2 + \tan x^2$$

$$f'(\sqrt{x}) = 2\pi\left(\frac{1}{(\cos\pi)^2}\right) + \tan\pi = 2\pi$$

(17) إذا كانت $f(x) = \sin x - \frac{1}{3}\sin^3 x$ فأثبت أن $f'(x) = \cos^3 x$

$$f'(x) = \cos x - (\sin x)^2(\cos x)$$

$$= \cos x - \sin^2 x\cos x = \cos x(1-\sin^2 x)$$

$$= \cos x(\cos^2 x) = \cos^3 x$$

(18) إذا كانت $g(x) = \sin x$, $f(x) = x^2 - \frac{\pi}{4}$ فأوجد $[g\circ f]'(\sqrt{\pi})$

$$[g\circ f] = g[f(x)] = g\left[x^2 - \frac{\pi}{4}\right] = \sin\left(x^2 - \frac{\pi}{4}\right)$$

$$[g\circ f]' = \left[\cos\left(x^2 - \frac{\pi}{4}\right)\right](2x)$$

$$[g\circ f]'(\sqrt{\pi}) = 2\sqrt{\pi}\cos\left(\pi - \frac{\pi}{4}\right) = 2\sqrt{\pi}\cos\frac{3\pi}{4}$$

$$= \cancel{2}\sqrt{\pi}\left(\frac{-\sqrt{2}}{\cancel{2}}\right) = -\sqrt{2\pi}$$

(19) إذا كانت $g'(x) = \tan x$, $f(x) = x^3$ فأوجد $[g\circ f]'(x)$

$$[g\circ f]'(x) = g'[f(x)]\cdot f'(x) = \left[g'[x^3]\right](3x^2)$$

$$= 3x^2\tan x^3$$

$f(x) = \dfrac{\csc x}{2+\cot x}$, $x = \dfrac{\pi}{2}$ (١٣)

$$f'(x) = \frac{(2+\cot x)(-\csc x\cot x) - \csc x(-\csc^2 x)}{(2+\cot x)^2}$$

$$f'(x) = \frac{\frac{-2\cos x}{\sin^2 x} - \frac{\cos^2 x}{\sin^3 x} + \frac{1}{\sin^3 x}}{\left(\frac{2}{1} + \frac{\cos x}{\sin x}\right)^2}$$

$$f'(x) = \frac{\frac{-2\cos x\sin x - \cos^2 x + 1}{\sin^3 x}}{\left(\frac{2\sin x+\cos x}{\sin x}\right)^2}$$

$$f'(x) = \frac{-\sin 2x + \cos^2 x + 1}{\sin^{3} x\,\frac{(2\sin x+\cos x)^2}{\sin^2 x}}$$

$$f'(x) = \frac{-\sin 2x - \cos^2 x + 1}{\sin x(2\sin x+\cos x)^2}$$

$$f'\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{-\sin\pi - \cos^2\frac{\pi}{2} + 1}{\sin\frac{\pi}{2}\left(2\sin\frac{\pi}{2} + \cos\frac{\pi}{2}\right)^2}$$

$$= \frac{0 - 0 + 1}{1(4)}$$

$$= \frac{1}{4}$$

$f(x) = \dfrac{1+\sec 4x}{1-2\sec 4x}$, $x = \dfrac{\pi}{4}$ (١٤)

$$f'(x) = \frac{(1-2\sec 4x)(4\sec 4x\tan 4x) - (1+\sec 4x)[2(4\sec 4x\tan 4x)]}{(1-2\sec 4x)^2}$$

$$f'(x) = \frac{4\sec 4x\tan 4x - 8\sec^2 4x\tan 4x - (8\sec 4x\tan 4x + 8\sec^2 4x\tan 4x)}{(1-2\sec 4x)^2}$$

$$f'(x) = \frac{-4\sec 4x\tan 4x - 16\sec^2 4x\tan 4x}{(1-2\sec 4x)^2}$$

مثال: $f(x)=x^4-2x^{-3}+\frac{1}{2}x^2+8$

أوجد $f'(x)$, $f''(x)$, $f'''(x)$

$f'(x)=4x^3+6x^{-4}+x$

$f''(x)=12x^2-24x^{-5}+1$

$f'''(x)=24x+120x^{-6}$

تدريب: في مثال ١ أوجد $\frac{d^5}{dx^5}(f(x))$

$f''''(x)=24-720x^{-7}$

$f'''''(x)=5040x^{-8}=\frac{5040}{x^8}$

$f'''''(1)=\frac{5040}{1}=5040$

مثال: إذا $y=\cos x$ أثبت أن

$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2-y\frac{d^2y}{dx^2}=1$

$\frac{dy}{dx}=-\sin x$

$\frac{d^2y}{dx^2}=-\cos x$

$LHS=\left(\frac{dy}{dx}\right)^2-y\frac{d^2y}{dx^2}$

$(-\sin x)^2-\cos x(-\cos x)$

$\sin^2 x+\cos^2 x=1$

$=RHS$

تدريب: إذا $y=\cos x$ أثبت أن $y=\frac{d^4y}{dx^4}$

$y=\cos x$

$\frac{dy}{dx}=-\sin x$

$\frac{d^2y}{dx^2}=-(\cos x)$

$\frac{d^3y}{dx^4}=-(-\sin x)=\sin x$

$\frac{d^4y}{dx^4}=\cos x$

$\frac{d^4y}{dx^4}=y$

مثال ٣: $K\in R$ ، $f(x)=x^2+\frac{K}{x}$ أوجد قيمة K

إذا كانت $f''(x)=0$ عندما $x=1$

$f(x)=x^2+Kx^{-1}$

$f'(x)=2x-Kx^{-2}$

$f''(x)=2+\frac{2K}{x^3}$

$\because f''(1)=0$

$\therefore 2+2K=0$

$2K=-2$

$K=-1$

مثال ٤: $g(x)=3x$ ، $f'(x)=\cos x^2$ أوجد

$[f\circ g]''(x)$ عندما $x=\frac{\sqrt{\pi}}{3}$

$[f\circ g]'(x)=f'[g(x)]\cdot g'(x)$

$=f'[3x](3)$

$=3\cos(3x)^2$

$=3\cos 9x^2$

$[f\circ g]''(x)=3\left[-\sin 9x^2(18x)\right]$

$=-54x\sin 9x^2$

$[f\circ g]''\left(\frac{\sqrt{\pi}}{3}\right)=-54\left(\frac{\sqrt{\pi}}{3}\right)\sin 9\left(\frac{\sqrt{\pi}}{3}\right)^2$

$=-18\sqrt{\pi}\sin\pi$

$=-18\sqrt{\pi}\,(0)$

$=0$

/ /

c) $f(x) = \frac{x^2+1}{x}$

$f(x) = x + \frac{1}{x} = x + x^{-1}$

$f'(x) = 1 - x^{-2}$

$f''(x) = 2x^{-3}$

$f'''(x) = -6x^{-4} = \frac{-6}{x^4}$

c) إذا $y = \sec 2x$ أثبت أن $\frac{d^2y}{dx^2} + 4y = 8y^3$

$\because y = \sec 2x$

$\therefore \frac{dy}{dx} = 2\sec 2x \tan 2x$

$\frac{d^2y}{dx^2} = 2\sec 2x(2\sec^2 2x) + \tan 2x(4\sec 2x \tan 2x)$

$= 4\sec^3 2x + 4\tan^2 2x \sec 2x$

$= 4\sec 2x(\sec^2 2x + \tan^2 2x)$

$LHS = \frac{d^2y}{dx^2} + 4y$

$= 4\sec 2x(\sec^2 2x + \tan^2 2x) + 4\sec 2x$

$\because \tan^2 x + 1 = \sec^2 x \Rightarrow \therefore \tan^2 x = \sec^2 x - 1$

$= 4\sec 2x(\sec^2 2x + \sec^2 2x - 1) + 4\sec 2x$

$= 4\sec 2x(2\sec^2 2x - 1) + 4\sec 2x$

$= 8\sec^3 2x - \cancel{4\sec 2x} + \cancel{4\sec 2x}$

$= 8(\sec 2x)^3$

$= 8y^3 = RHS$

3) إذا $h(x) = \cos ax - \sin ax$ حيث $a \in R$ فأثبت أن $h''(x) + a^2 h(x) = 0$

$h'(x) = -a\sin ax - a\cos ax$

$h''(x) = -a(a\cos ax) - a(-a\sin ax)$

$= -a^2\cos ax + a^2\sin ax = a^2(-\cos ax + \sin ax)$

$LHS = h''(x) + a^2 h(x)$

$= a^2(-\cos ax + \sin ax) + a^2(\cos ax - \sin ax)$

$= -a^2(\cos ax - \sin ax) + a^2(\cos ax - \sin ax)$

$= 0$

$= RHS$

5) إذا $f(x) = \sin x,\ g(x) = x^2$ فأوجد $[f \circ g]''(x)$ عندما $x = \sqrt{\frac{\pi}{2}}$

$[f \circ g]'(x) = f'[g(x)] \cdot g'(x)$

$= f'[x^2](2x)$ $\quad f'(x) = \cos x$

$= 2x(\cos x^2)$

$= 2x\cos x^2$

$[f \circ g]''(x) = 2x[-\sin x^2(2x)] + 2\cos x^2$

$= -4x^2\sin x^2 + 2\cos x^2$

$[f \circ g]''\left(\sqrt{\frac{\pi}{2}}\right) = -4\left(\sqrt{\frac{\pi}{2}}\right)^2 \sin\left(\sqrt{\frac{\pi}{2}}\right)^2 + 2\cos\left(\sqrt{\frac{\pi}{2}}\right)^2$

$= -4\left(\frac{\pi}{2}\right)\sin\frac{\pi}{2} + 2\cos\frac{\pi}{2}$

$= -2\pi(1) + 2(0)$

$= -2\pi$

تمارين الكتاب ص 39 : أوجد المشتقة الثانية والثالثة لكل مما يأتي :

a) $f(x) = \frac{2}{3}x^3 + 2x^{-2} - 3x + 6$

$\frac{dy}{dx} = 2x^2 - 4x^{-3} - 3$

$\frac{d^2y}{dx^2} = 4x + 12x^{-4}$

$\frac{d^3y}{dx^3} = 4 - 48x^{-5}$

b) $f(x) = 3x\sin x$

$f'(x) = 3x(\cos x) + 3\sin x$

$f'(x) = 3x\cos x + 3\sin x$

$f''(x) = 3x(-\sin x) + 3\cos x + 3\cos x$

$f''(x) = -3x\sin x + 6\cos x$

$f'''(x) = -3x(\cos x) - 3\sin x - 6\sin x$

$f'''(x) = -3x\cos x - 9\sin x$

/ /

$f'(x) = \csc x$, $g(x) = 2x$ (7

أوجد $[f\circ g]'(x)$

$[f\circ g]'(x) = f'[g(x)] \cdot g'(x)$

$= f'[2x]\ (2)$

$= 2\csc 2x$

$[f\circ g]''(x) = -2\csc 2x \cot 2x\,(2)$

$= -4\csc 2x \cot 2x$

$y = \sin x + 2$ أوجد (4

$\frac{d^3y}{dx^3} + \frac{d^2y}{dx^2} + \frac{dy}{dx} + y$

$\because y = \sin x + 2$

$\therefore y' = \cos x$

$y'' = -\sin x$

$y''' = -\cos x$

$y''' + y'' + y' + y = \cancel{-\cos x} \cancel{-\sin x} + \cancel{\cos x} \cancel{+\sin x} + 2$

$= 2$

$y = x\tan x$ أثبت أن (5

$\frac{d^2y}{dx^2} = 2(1+y)\sec^2 x$

$\because y = x\tan x$

$\therefore y' = x\sec^2 x + \tan x$

$y'' = x[2\sec x \sec x \tan x] + \sec^2 x + \sec^2 x$

$LHS = 2x\sec^2 x\tan x + 2\sec^2 x$

$= \sec^2 x(2x\tan x + 2)$

$RHS = 2(1+y)\sec^2 x$

$= (2+2y)\sec^2 x$

$= \sec^2 x(2 + 2x\tan x)$

$LHS = RHS$

$f(x) = x^3$, $g(x) = \sin x$ (6

أوجد $[g\circ f]''(x)$

$[g\circ f](x) = g[f(x)] = g[x^3] = \sin x^3$

$[g\circ f]'(x) = 3x^2\cos x^3$

$[g\circ f]''(x) = 3x^2(-3x^2\sin x^3) + 6x\cos x^3$

$= -9x^4\sin x^3 + 6x\cos x^3$

حل اختبار الفصل الأول ص ٤٥

أوجد $\frac{dy}{dx}$ لكل مما يأتي:

(1 $y = 2z - \frac{1}{z}$, $z = 7x - 2$, $x \neq \frac{7}{2}$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dz} \cdot \frac{dz}{dx}$$

$$= \left(2 + \frac{1}{z^2}\right)(7) = 14 + \frac{7}{z^2}$$

$$= 14 + \frac{7}{(7x-2)^2}$$

(2 $\frac{dy}{dz} = 3z^2 - 7$, $z = 8x^3 + 5$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dz}{dx} \cdot \frac{dy}{dz}$$

$$= 24x^2(3z^2 - 7)$$

$$= 72x^2 z^2 - 168x^2$$

$$= 72x^2(8x^3+5)^{8x^3+5} - 168x^2$$

(3 أوجد $\frac{dy}{dx}$ عند قيمة x المعطاة $x = -1$ ،

$y = \frac{1}{z+6}$, $z = 3x^2 - 1$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dz} \cdot \frac{dz}{dx}$$

$$= \left(\frac{(z+6)(0) - (1)(1)}{(z+6)^2}\right)(6x)$$

$$= \frac{-6x}{[(3x^2-1)+6]^2} = \frac{-6x}{(3x^2+5)^2}$$

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=-1} = \frac{-6(-1)}{(3(-1)^2+5)^2} = \frac{3}{32}$$

أوجد $[f \circ g]'(x)$ لكل مما يأتي:

(4 $f(x) = x^2 - 5x + 3$, $g(x) = 6x + 1$

$f'(x) = 2x - 5$, $g'(x) = 6$

$$[f \circ g]'(x) = f'[g(x)] \cdot g'(x)$$

$$= f'[6x+1](6)$$

$$= [2(6x+1) - 5][6]$$

$$= [12x + 2 - 5][6] = 72x - 18$$

(5 $f(x) = \frac{1}{x^2}$, $g(x) = 4x - 3$, $x \neq \frac{3}{4}$

$$[f \circ g]'(x) = f'[g(x)] \cdot g'(x)$$

$$= (f'[4x-3])(4)$$

$$= \left(\frac{1}{(4x-3)^2}\right)(4) = \frac{4}{(4x-3)^2}$$

أوجد $\frac{dy}{dx}$ لكل دالة مما يأتي:

(6 $y = \frac{9}{\sqrt{x^2+16}}$

$$y = \frac{9}{(x^2+16)^{\frac{1}{2}}} = 9(x^2+16)^{-\frac{1}{2}}$$

$$y' = -\frac{9}{2}(x^2+16)^{-\frac{3}{2}}(2x) = 9x(x^2+16)^{-\frac{3}{2}}$$

$$y' = \frac{-9x}{\sqrt{(x^2+16)^3}}$$

(7 $y = x^5(x^2+3)^{-1}$

$$y' = x^5[-(x^2+3)^{-2}(2x)] + (x^2+3)^{-1}(5x^4)$$

$$= -2x^6(x^2+3)^{-2} + 5x^4(x^2+3)^{-1}$$

$$= x^4(x^2+3)^{-2}(-2x^2 + 5(x^2+3))$$

$$= x^4(x^2+3)^{-2}[-2x^2 + 5x^2 + 15]$$

$$= x^4(x^2+3)^{-2}(3x^2+15)$$

/ /

10) إذا كانت $\frac{x^2}{25}-\frac{y^2}{9}=1$ فأثبت أن $\frac{dy}{dx}=\frac{9x}{25y}$

$\frac{1}{25}x^2-\frac{1}{9}y^2=1$

$\frac{2}{25}x-\frac{2}{9}yy'=0$

$\frac{9}{2y}\times\frac{2x}{25}=\frac{\cancel{2y}y'}{\cancel{9}}\times\frac{\cancel{9}}{\cancel{2y}}$

$y'=\frac{18x}{50y}$

$y'=\frac{\cancel{2}(9x)}{\cancel{2}(25y)}=\frac{9x}{25y}=RHS$

11) إذا كانت $x^2-5xy-y^2=7$ فأوجد $\frac{dy}{dx}$ عند النقطة $(1,-2)$

$2x-5xy'+y(-5)-2yy'=0$

$-2yy'-5xy'=-2x+5y$

$y'(-2y-5x)=-2x+5y$

$y'=\frac{-2x+5y}{-2y-5x}$

$\left(\frac{dy}{dx}\right)_{(1,-2)}=\frac{-2+5(-2)}{-2(-2)-5}=\frac{-2-10}{4-5}=12$

12) $y=\csc^2 x$, $z=y^3$ عندما $x=\frac{\pi}{4}$

$\frac{dz}{dx}=\frac{dz}{dy}\cdot\frac{dy}{dx}$

$=(3y^2)\left[2(\csc x)(-\csc x\cot x)\right]$

$=-6\csc^2x\cot x\,y^2=-6\csc^2x\cot x(\csc^2x)^2$

$=-6\csc^6x\cot x=\frac{-6}{(\sin\frac{\pi}{4})^6(\tan\frac{\pi}{4})}$

$=-48$

8) $y=\left(\frac{1+x}{x-3}\right)^8$, $x\neq3$

$y'=8\left(\frac{1+x}{x-3}\right)^7\left[\frac{(x-3)(1)-(1+x)(1)}{(x-3)^2}\right]$

$y'=8\left(\frac{1+x}{x-3}\right)^7\left[\frac{\cancel{x}-3-1-\cancel{x}}{(x-3)^2}\right]$

$y'=\left(\frac{-32}{(x-3)^2}\right)\left(\frac{1+x}{x-3}\right)^7$

9) إذا كان $(y+2)^3=(5x-3)^2$ فأثبت أن $9(y+2)\left(\frac{dy}{dx}\right)^2=100$

$3(y+2)^2(y')=2(5x-3)(5)$

$3y'(y+2)^2=10(5x-3)$

$y'=\frac{10(5x-3)}{3(y+2)^2}$

$(y')^2=\frac{100(5x-3)^2}{9(y+2)^4}$

$LHS=9(y+2)(y')^2$

$=\cancel{9}\cancel{(y+2)}\left[\frac{100(5x-3)^2}{\cancel{9}(y+2)^{\cancel{4}\,3}}\right]$

$=\frac{100(5x-3)^2}{(y+2)^3}=\frac{100\cancel{(5x-3)^2}}{\cancel{(5x-3)^2}}$

$=100$

$=RHS$

x^2-25

$(x-5)(x+5)$

15) أثبت أن $y=\sin^4x-\cos^4x$

$$\frac{dy}{dx}=4\sin x\cos x$$

$\because y=\sin^4x-\cos^4x$

$\therefore y=(\sin^2x-\cos^2x)(\sin^2x+\cos^2x)$

$y=\sin^2x-\cos^2x$

$$\frac{dy}{dx}=2(\sin x)(\cos x)-2(\cos x)(-\sin x)$$

$=2\sin x\cos x+2\sin x\cos x$

$=4\sin x\cos x$

16) $f(x)=(\csc x-1)(\csc x+1)^3$

أوجد $f'(\frac{\pi}{4})$

$f'(x)=(\csc x-1)\left[3(\csc x+1)^2(-\csc x\cot x)\right]+(\csc x+1)^3(-\csc x\cot x)$

$$f'(\tfrac{\pi}{4})=\left[\frac{1}{\sin\pi/4}-1\right]\left[3\left(\frac{1}{\sin\pi/4}+1\right)^2\left(\frac{-1}{(\sin\pi/4)(\tan 45)}\right)\right]+\left(\frac{1}{\sin\pi/4}+1\right)^3\left(\frac{-1}{(\sin\pi/4)(\tan\pi/4)}\right)$$

$=(-1+\sqrt{2})\left[(-3\sqrt{2})(3+2\sqrt{2})\right]+(7+5\sqrt{2})(-\sqrt{2})$

$=-6-3\sqrt{2}+(-10-7\sqrt{2})$

$=-16-10\sqrt{2}$

17) أوجد $\frac{d^2y}{dx^2}$ عند $(1,1)$ إذا $x^2+y^2+xy-3=0$

$2x+2yy'+xy'+y=0$

$2yy'+xy'=-2x-y$

$y'(2y+x)=-2x-y$

$$y'=\frac{-2x-y}{2y+x}$$

13) إذا كانت $f(x)=\sin^2x$, $g(x)=\sqrt{x}$ فأوجد $[f\circ g]'(\frac{\pi^2}{4})$

$f'(x)=2(\sin x)(\cos x)$

$=\sin 2x$

$$g'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$[f\circ g]'(x)=f'[g(x)]\cdot g'(x)$

$$=\left[f'[\sqrt{x}]\right]\left[\frac{1}{2\sqrt{x}}\right]$$

$$=\sin 2\sqrt{x}\cdot\frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$=\frac{\sin 2\sqrt{x}}{2\sqrt{x}}$$

$$[f\circ g]'(\tfrac{\pi^2}{4})=\frac{\sin 2\sqrt{\pi^2/4}}{2\sqrt{\frac{\pi^2}{4}}}$$

$$=\frac{\sin 2(\frac{\pi}{2})}{2(\frac{\pi}{2})}=\frac{\sin\pi}{\pi}=0$$

14) أوجد $f'(\sqrt{\pi})$ إذا $f(x)=\sec^3x^2$

$f(x)=(\sec x^2)^3$

$f'(x)=3(\sec x^2)^2\left[2x\sec x^2\tan x^2\right]$

$=6x\sec^3x^2\tan x^2$

$f'(\sqrt{\pi})=6\sqrt{\pi}\sec^3\pi\tan\pi$

$$=\frac{6\sqrt{\pi}\tan\pi}{(\cos\pi)^3}=0$$

$$y''=\frac{(2y+x)(-2-y')-(-2x-y)(2y'+1)}{(2y+x)^2}$$

$$y''=\frac{-4y-\cancel{2x}-\cancel{2yy'}-xy'+4xy'+\cancel{2yy'}+\cancel{2x}+y}{(2y+x)^2}=\frac{-3y-xy'+4xy'}{(2y+x)^2}$$

$$y''_{(1,1)}=\frac{-3(1)+(1)(1)+4(1)\left[\frac{-2(1)-(1)}{2(1)+(1)}\right]}{\left[2(1)+(1)\right]^2}=\frac{-2}{3}$$

/ /

18) إذا كان $x^2+y^2=4$ فأثبت أن

$$1+y\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2=0$$

$$\because x^2+y^2=4$$

$$\therefore 2x+2y\frac{dy}{dx}=0$$

$$2+2y\frac{d^2y}{dx^2}+\frac{dy}{dx}\left(2\frac{dy}{dx}\right)=0$$

$$\frac{2}{2}+\frac{2y}{2}\frac{d^2y}{dx^2}+\frac{2}{2}\left(\frac{dy}{dx}\right)^2=\frac{0}{2}$$

$$1+y\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2=0$$

20) إذا كانت $g(x)=x^3$, $f(x)=\cos 4x$ فأوجد $[g\circ f]\left(\frac{\pi}{16}\right)$.

$$g'(x)=3x^2$$

$$f'(x)=-\sin 4x\,(4)=-4\sin 4x$$

$$[g\circ f]'(x)=g'[f(x)]\cdot f'(x)$$

$$=\left[g'[\cos 4x]\right]\left[-4\sin 4x\right]$$

$$=(-4\sin 4x)(3[\cos 4x]^2)$$

$$=(-4\sin 4x)(3\cos^2 4x)$$

$$=-12\sin 4x\cos^2 4x$$

$$=-2\sin 4x\cos 4x\,(6\cos 4x)$$

$$=-\sin 8x\,(6\cos 4x)$$

$$=-6\sin 8x\cos 4x$$

$$[g\circ f]''(x)=-6\sin 8x\,(-4\sin 4x)+\cos 4x\,(-6(8)\cos 8x)$$

$$=24\sin 8x\sin 4x-48\cos 4x\cos 8x$$

$$[g\circ f]''\left(\frac{\pi}{16}\right)=24\sin 8\left(\frac{\pi}{16}\right)\sin 4\left(\frac{\pi}{16}\right)-48\cos 4\left(\frac{\pi}{16}\right)\cos 8\left(\frac{\pi}{16}\right)$$

$$=24\sin\frac{\pi}{2}\sin\frac{\pi}{4}-48\cos\frac{\pi}{4}\cos\frac{\pi}{2}$$

$$=12\sqrt{2}$$

مثال ①: متى تكون $y = x^2$ متزايدة ومتى تكون متناقصة

$$\frac{dy}{dx} = 2x$$

أي متزايدة عند $0 < x\ \forall x$

ومتناقصة عند $\forall x < 0$

مثال ②: أوجد m عند النقطة

a) $f(x) = \dfrac{x+3}{x+1}$, $\neq -1$, $x = 1$, $x = \dfrac{-3}{2}$

b) $f(x) = |x-1|$, $x = \dfrac{1}{2}$, $x = 2$

الحل:

a) $f(1) = \dfrac{1+3}{1+1} = \dfrac{1}{2}$ $\quad \left(1, \dfrac{1}{2}\right)$

$$f\left(\frac{-3}{2}\right) = \frac{\frac{-3}{2}+3}{\frac{-3}{2}+1} = -3 \quad \left(\frac{-3}{2}, -3\right)$$

$$f'(x) = \frac{(x+1) - (x+3)}{(x+1)^2}$$

$$= \frac{\cancel{x}+1-\cancel{x}-3}{(x+1)^2} = \frac{-2}{(x+1)^2}$$

$$m\Big|_{x=1} = \left(\frac{dy}{dx}\right)_{\left(1, \frac{1}{2}\right)}$$

$$= \frac{-2}{(1+1)^2} = \frac{-2}{4} = \frac{-1}{2}$$

$$m\Big|_{x=\frac{-3}{2}} = \left(\frac{dy}{dx}\right)_{\left(\frac{-3}{2}, -3\right)}$$

$$= \frac{-2}{\left(\frac{-3}{2}+1\right)^2} = \frac{-2}{\frac{1}{4}} = -8$$

b) صفر المطلق $\quad x - 1 = 0$

$$x = 1$$

بإعادة تعريف المطلق

$$f(x) = \begin{cases} (x-1) & x \geq 1 \\ -(x-1) & x < 1 \end{cases}$$

$\because x = 2$

$\therefore f(x) = (x-1)$

$$m\Big|_{x=2} = f'(2)$$

$$= 1$$

مثال ③: $y = \dfrac{2}{3}x^3 - \dfrac{9}{2}x^2 + 7x + \dfrac{3}{2}$

أوجد النقاط / المماس يصنع زاوية ظلها (-2) مع x^+

$m = f'(x)$

$= 2x^2 - 9x + 7$

$m = \tan\theta$

$2x^2 - 9x + 7 = -2$

$2x^2 - 9x + 9 = 0$

$(x-3)(2x-3) = 0$

$x = 3$ or $x = \dfrac{3}{2}$

$f(3) = 0$ $\quad (3, 0)$

$f\left(\dfrac{3}{2}\right) = \dfrac{33}{8}$ $\quad \left(\dfrac{3}{2}, \dfrac{33}{8}\right)$

$f(2) = 2^2 + 4(2) + 3 = 15 \qquad (2, 15)$

(b

$y' = \tan\theta$

$y' = \tan\frac{3\pi}{4} = -1$

$2x - 4 = -1$

$2x = 3$

$x = \frac{3}{2}$

$f(\frac{3}{2}) = \frac{-3}{4}$

$(\frac{3}{2}, \frac{-3}{4})$

مثال 5: أوجد قياس الزاوية التي يصنعها المماس لمنحنى $f(x) = \frac{x-3}{x+1}$ مع x^+ عند $(1,-1)$ الواقعة على المنحنى

$f'(x) = \frac{(x+1)-(x-3)}{(x+1)^2} = \frac{x+1-x+3}{(x+1)^2} = \frac{4}{(x+1)^2}$

$\left(\frac{dy}{dx}\right)_{(1,-1)} = \tan\theta$

$\frac{4}{(1+1)^2} = \tan\theta$

$\tan\theta = 1$

$\theta = \tan^{-1}(1)$

$= 45^\circ$

مثال 6: أوجد النقاط $y = x^3 - 3x - 2$ ويكون مماسها في الحالة موازي للمستقيم $y + 3x - 7 = 0$

$m = \frac{-a}{b} = \frac{-3}{1} = -3$

$\frac{dy}{dx} = 3x^2 - 3$

∵ كلا هما متوازيان

∴ الميلان متساويان

$\left(\frac{dy}{dx}\right)_{(x,y)} = m$

$3x^2 - 3 = -3$

$\frac{\cancel{3}(x^2-1)}{\cancel{3}} = \frac{-3}{3}$

$x^2 \cancel{-1} = \cancel{-1}$

$x^2 = 0$

$x = 0$

$f(0) = -2 \qquad (0, -2)$

مثال 4: أوجد النقاط $f(x) = \frac{x^2-3}{x+2}$ المماس موازيه لمحور x

$f'(x) = \frac{(x+2)(2x) - (x^2-3)}{(x+2)^2}$

$= \frac{2x^2 + 4x - x^2 + 3}{(x+2)^2}$

$= \frac{x^2 + 4x + 3}{(x+2)^2}$

∵ المماس // لمحور x

∴ $m = 0$

$m = f'(x)$

$\frac{0}{1} = \frac{x^2 + 4x + 3}{(x+2)^2}$

$0 = x^2 + 4x + 3$

$(x+1)(x+3) = 0$

$x = -1$ or $x = -3$

$f(-1) = -2$ | $f(-3) = -6$

$(-1, -2)$ | $(-3, -6)$

تدريب: أوجد النقاط $y = x^2 - 4x + 3$ والتي يكون المماس عندها

a) موازيًا لمحور x

b) يصنع مع الاتجاه الموجب لمحور x زاوية قياسها $\frac{3\pi}{4}$

$y' = 2x - 4$

∵ المماس موازي لمحور x

∴ $m = 0$

$y' = m$

$2x - 4 = 0$

$2x = 4$

$x = 2$

مثال٧: أوجد معادلة المماس لـ $y=x^3-3x^2+5$ عند النقطة $(1,3)$

$$\frac{dy}{dx}=3x^2-6x$$

$$m=\left(\frac{dy}{dx}\right)_{(x,y)}$$

(a $m=3(1)^2-6(1)=-3$

$$y-y_1=m(x-x_1)$$

$$y-3=-3(x-1)$$

$$y-3=-3x+3$$

$$3x+y-6=0$$

مثال: معادلتي المماس والعمودي لـ $y=x^3-2x^2+4$ عند النقطة $(2,4)$

$$\frac{dy}{dx}=3x^2-4x$$

(b $m=\left(\frac{dy}{dx}\right)_{(x,y)}$

$$=3(2)^2-4(2)=4$$

معادلة المماس $y-y_1=m(x-x_1)$

$$y-4=4(x-2)$$

$$y-4=4x-8$$

$$\frac{-4x}{-1}+\frac{y}{-1}+\frac{4}{-1}=\frac{0}{-1}$$

$$4x-y-4=0$$

معادلة العمودي

$$y-y_1=\frac{-1}{m}(x-x_1)$$

$$y-4=\frac{-1}{4}(x-2)$$

$$4y-16=-x+2$$

$$x+4y-18=0$$

تدريب ٢: أوجد النقاط الواقعة على منحنى $y=x^2-7x+3$ والتي يكون المماس عندها

a) موازيًا للمستقيم $5x+y-3=0$

b) عموديًا على المستقيم $2x+4y=1$

الحل

$$5x+y-3=0$$

$$\therefore y=-5x+3$$

$$\therefore m=-5$$

$$y'=2x-7$$

$$m=y'$$

$$-5=2x-7$$

$$2=2x$$

$$x=1$$

$$f(1)=-3$$

$$(1,-3)$$

$$2x+4y=1$$

$$m=\frac{-a}{b}=\frac{-2}{4}=\frac{-1}{2}$$

$m_\perp=2$ or $m_1m_2=-1$

$$2\times\frac{-1}{2}m_2=-1\times 2$$

$$\frac{-m_2}{-1}=\frac{-2}{-1}$$

$$m_2=2$$

$$y'=2x-7$$

$$2x-7=2$$

$$2x=9$$

$$x=\frac{9}{2}$$

$$f\left(\frac{9}{2}\right)=\frac{-33}{4}\Rightarrow\left(\frac{9}{2},\frac{-33}{4}\right)$$

مثال: معادلة المماس لـ $x^2+y^2+3x-4y=1$ عند $(1,3)$

$$2x+2y\frac{dy}{dx}+3-4\frac{dy}{dx}=0$$

$$\frac{dy}{dx}(2y-4)=-2x-3$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{-2x-3}{2y-4}$$

$$m=\left(\frac{dy}{dx}\right)_{(1,3)}$$

$$m=\frac{-2(1)-3}{2(3)-4}=\frac{-5}{2}$$

$$y-y_1=m(x-x_1)$$

$$y-3=\frac{-5}{2}(x-1)$$

$$2y-6=-5x+5$$

$$5x+2y-11=0$$

مثال: أوجد معادلة العمودي للمنحنى $y=x^2+2x-3$ عند نقطة تقاطعه مع $y=x-1$

$$x^2+2x-3=x-1$$
$$x^2+x-2=0$$
$$(x-1)(x+2)=0$$

$x=1$	$x=-2$
$f(1)=0$	$f(-2)=-3$
$(1,0)$	$(-2,-3)$
$m=\left(\frac{dy}{dx}\right)_{(1,0)}$	$m=\left(\frac{dy}{dx}\right)_{(-2,-3)}$
$\frac{dy}{dx}=2x+2$	$\frac{dy}{dx}=2x+2$
$\left(\frac{dy}{dx}\right)_{(1,0)}=2(1)+2=4$	$\left(\frac{dy}{dx}\right)_{(-2,-3)}=2(-2)+2=-2$
$\therefore m=4$	$\therefore m=-2$
$y-y_1=\frac{-1}{m}(x-x_1)$	$y-y_1=\frac{-1}{m}(x-x_1)$
$y-0=\frac{-1}{4}(x-1)$	$y+3=\frac{1}{2}(x+2)$
$4y=-x+1$	$2y+6=x+2$
$x+4y-1=0$	$x-2y-4=0$

تمارين الكتاب ص 54

أوجد ميل المماس للمنحنى كل مما يأتي عند قيمة x أو النقطة المعطاة

(1 $y=3x^3-5x^2+1$, $x=\frac{1}{3}$

$y'=9x^2-10x$

$m=y'|_{x=\frac{1}{3}}$

$m=9\left(\frac{1}{3}\right)^2-10\left(\frac{1}{3}\right)=\frac{-7}{3}$

(2 $y=x+\frac{1}{x}$, $x=1$, $x\neq 0$

$y=x+x^{-1}$

$y'=1-x^{-2}=1-\frac{1}{x^2}$

$m=y'|_{x=1}=1-\frac{1}{1}=0$

(3 $y^2=10-x^2$, $(-1,3)$

$2y\frac{dy}{dx}=-2x$

$y\frac{dy}{dx}=-x$

$\frac{dy}{dx}=\frac{-x}{y}$

$m=\left(\frac{dy}{dx}\right)_{(-1,3)}=\frac{-(-1)}{3}=\frac{1}{3}$

(4 $xy^3=2$, $x=2$

$x\left(3y^2\frac{dy}{dx}\right)+y^3=0$

$3xy^2\frac{dy}{dx}=-y^3$

$\frac{dy}{dx}=\frac{-y^3}{3xy^2}=\frac{-y}{3x}$

$xy^3=2 \Rightarrow 2y^3=2 \Rightarrow y^3=1$

$y=1$

$m=\left(\frac{dy}{dx}\right)_{(2,1)}=\frac{-1}{3(2)}=\frac{-1}{6}$

(5 $y=x^2+3|x|$, $x=-1$

$y=\begin{cases} x^2+3x & \geq 0 \\ x^2-3x & <0 \end{cases}$

$\because x<0$

$\therefore y=x^2-3x$

$y'=2x-3$

$m=y'|_{x=-1}=2(-1)-3=-2-3=-5$

/ /

١٠) أوجد النقاط لـ $y^2-2x-4y-1=0$ المماس // لمحور y

$\frac{2y}{2}\frac{dy}{dx}-\frac{2}{2}-\frac{4}{2}\frac{dy}{dx}=\frac{0}{2}$

$y\frac{dy}{dx}-1-2\frac{dy}{dx}=0$

$\frac{dy}{dx}(y-2)=1$

$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{y-2}$

المماس // لمحور y :

الميل غير معرف ∴

مقام المشتقة = صفر

$y-2=0$

$y=2$

$(2)^2-2x-4(2)-1=0$

$4-2x-8-1=0$

$-2x=5$

$x=\frac{5}{-2}$

$(\frac{5}{-2}, 2)$

١١) أوجد النقاط لـ $y=x^2+2$ ، المماس يصنع زاوية x^+ $\theta = \frac{3\pi}{4}$

$y'=2x$

$y'=\tan\theta$

$2x=\tan\frac{3\pi}{4}$

$2x=-1$

$x=\frac{-1}{2}$

$f(\frac{-1}{2})=\frac{9}{4}$

$(-\frac{1}{2}, \frac{9}{4})$

١٢) أوجد a و b إذا كان المماس لـ $y=ax^2+bx$ عند $(2,5)$ الواقعة عليه موازياً لمحور x

$(2,5)$ تحقق المعادلة

$\boxed{5=4a+2b}$

$y'=2ax+b$

المماس // لمحور x ∴

$\therefore m=0$

$m=\left(\frac{dy}{dx}\right)_{(2,5)}$

$\boxed{0=4a+b}$

بطرح المعادلتين

$4a+2b=5$

$\ominus\ 4a+b=0$

$b=5$

$4a+5=0$

$a=\frac{-5}{4}$

6) $y=\sqrt{x+1}$, $(3,2)$, $x \geq -1$

$y'=\frac{1}{2\sqrt{x+1}}$

$m=\left(\frac{dy}{dx}\right)_{(3,2)}$

$m=\frac{1}{2\sqrt{3+1}}$

$=\frac{1}{2\sqrt{4}}=\frac{1}{4}$

7) $f(x)=\frac{3x-1}{2x-1}$, $(1,2)$, $x \neq \frac{1}{2}$

$f'(x)=\frac{(2x-1)(3)-(3x-1)(2)}{(2x-1)^2}$

$f'(x)=\frac{\cancel{6x}-3-\cancel{6x}+2}{(2x-1)^2}=\frac{-1}{(2x-1)^2}$

$m=\left(\frac{dy}{dx}\right)_{(1,2)}=\frac{-1}{(2-1)^2}=\frac{-1}{1}=-1$

8) أوجد النقاط لـ $f(x)=x^3-3x$ المماس موازي لمحور x

$f'(x)=3x^2-3$

المماس // لمحور x ∴

$\therefore m=0$

$m=f'(x)$

$\frac{0}{3}=\frac{3x^2}{3}-\frac{3}{3}$

$0=x^2-1$

$x^2=1$

$x=\pm1$ ∴

$f(1)=-2 \Rightarrow (1,-2)$

$f(-1)=2 \Rightarrow (-1,2)$

9) أوجد θ^+ مع x عند $(2,-3)$ لـ $f(x)=2x^2-7x+3$

$f'(x)=4x-7$

$\tan\theta=\left(\frac{dy}{dx}\right)_{(2,-3)}$

$\tan\theta=4(2)-7$

$\tan\theta=1$

$\theta=\tan^{-1}(1)$

$\theta=45°$

/ /

١٣) أوجد معادلتي المماس والعمودي لمنحنى $y=x^3-2x^2+4$ عند $(2,4)$

$\frac{dy}{dx}=3x^2-4x$

$m=\left(\frac{dy}{dx}\right)_{(2,4)}=3(4)-4(2)=4$

معادلة المماس:	معادلة العمودي:
$y-y_1=m(x-x_1)$	$y-y_1=\frac{-1}{m}(x-x_1)$
$y-4=4(x-2)$	$y-4=\frac{-1}{4}(x-2)$
$y-4=4x-8$	$4y-16=-x+2$
$4x-y-4=0$	$x+4y-18=0$

١٤) أوجد معادلتي المماس والعمودي لمنحنى $x^2-y^2=7$ عند $(4,-3)$

$\frac{2x}{2}-\frac{2y}{2}\frac{dy}{dx}=\frac{0}{2}$

$x-y\frac{dy}{dx}=0$

$x=y\frac{dy}{dx}$

$\frac{dy}{dx}=\frac{x}{y}$

$m=\left(\frac{dy}{dx}\right)_{(4,-3)}=\frac{4}{-3}$

معادلة المماس:	معادلة العمودي:
$y-y_1=m(x-x_1)$	$y-y_1=\frac{-1}{m}(x-x_1)$
$y+3=\frac{4}{-3}(x-4)$	$y+3=\frac{3}{4}(x-4)$
$-3y-9=4x-16$	$4y+12=3x-12$
$4x+3y-7=0$	$3x-4y-24=0$

١٥) أوجد معادلتي المماس والعمودي لمنحنى $y=\frac{5}{x^2+1}$ عند $(-2,1)$

$y=5(x^2+1)^{-1}$

$y'=-5(x^2+1)^{-2}(2x)=\frac{-10x}{(x^2+1)^2}$

$m=\left(\frac{dy}{dx}\right)_{(-2,1)}=\frac{-10(-2)}{(1+1)^2}=\frac{4}{5}$

معادلة المماس:	معادلة العمودي:
$y-y_1=m(x-x_1)$	$y-y_1=\frac{-1}{m}(x-x_1)$
$y-1=\frac{4}{5}(x+2)$	$y-1=\frac{-5}{4}(x+2)$
$5y-5=4x+8$	$4y-4=-5x-10$
$4x-5y+13=0$	$5x+4y+6=0$

١٦) أوجد معادلات كل من المماس والعمودي لمنحنى $y=x^3-5x$ عند نقطة تقاطعه مع المستقيم $y=4x$

$4x=x^3-5x$

$x^3-9x=0$

$x(x^2-9)=0$

$x=0 \quad | \quad x^2-9=0$

$x^2=9$

$x=\pm 3$

$f(0)=0 \quad (0,0)$

$f(3)=12 \quad (3,12)$

$f(-3)=-12 \quad (-3,-12)$

$y'=3x^2-5$

$m_1=\left(\frac{dy}{dx}\right)_{(0,0)}=-5$

$m_2=\left(\frac{dy}{dx}\right)_{(3,12)}=22 \qquad m_3=\left(\frac{dy}{dx}\right)_{(-3,-12)}=22$

معادلة المماس ①:	معادلة العمودي ①:
$y-y_1=m(x-x_1)$	$y-y_1=\frac{-1}{m}(x-x_1)$
$y-0=-5(x-0)$	$y=\frac{1}{5}(x)$
$y=-5x$	$5y=x$
$5x+y=0$	$x-5y=0$

معادلة المماس ②:	معادلة العمودي ②:
$y-y_1=m(x-x_1)$	$y-y_1=\frac{-1}{m}(x-x_1)$
$y-12=22(x-3)$	$y-12=\frac{-1}{22}(x-3)$
$y-12=22x-66$	$22y-264=-x+3$
$22x-y-54=0$	$x+22y-267=0$

معادلة المماس ③:	معادلة العمودي ③:
$y-y_1=m(x-x_1)$	$y-y_1=\frac{-1}{m}(x-x_1)$
$y+12=22(x+3)$	$y+12=\frac{-1}{22}(x+3)$
$y+12=22x+66$	$22y+264=-x-3$
$22x-y-54=0$	$x+22y+267=0$

/ /

$x = 1$

$f(1) = 13$

$(1, 13)$

معادلة العمودي

$x = x_1$

$x = 1$

$x = \frac{5}{2}$

$f\left(\frac{5}{2}\right) = \frac{25}{4}$

$\left(\frac{5}{2}, \frac{25}{4}\right)$

معادلة العمودي

$x = x_1$

$x = \frac{5}{2}$

١٧) أوجد معادلتي المماس والعمودي لمنحنى $x^2 - y^2 = 12$ عند $(4, -2)$

$\frac{2x}{2} - \frac{2y}{2} \frac{dy}{dx} = \frac{0}{2}$

$x - y \frac{dy}{dx} = 0$

$x = y \frac{dy}{dx}$

$\frac{dy}{dx} = \frac{x}{y}$

$m = \left(\frac{dy}{dx}\right)_{(4,-2)} = \frac{4}{-2} = -2$

معادلة المماس:

$y - y_1 = m(x - x_1)$

$y + 2 = -2(x - 4)$

$2y + 4 = -x + 4$

$x + 2y = 0$

معادلة العمودي:

$y - y_1 = \frac{-1}{m}(x - x_1)$

$y + 2 = \frac{1}{2}(x - 4)$

$y + 2 = 2x - 8$

$2x - y - 10 = 0$

١٩) أوجد a و b إذا كان $y = ax^3 + bx^2$ يمس المستقيم $3x + y - 1 = 0$ عند $(1, -2)$ ثم أوجد معادلة العمودي على المنحنى عند النقطة نفسها

$(1, -2)$ تحقق المعادلة

$\boxed{-2 = a + b}$

$\frac{dy}{dx} = 3ax^2 + 2bx$

$3 + \frac{dy}{dx} = 0$

$\frac{dy}{dx} = -3$

$3ax^2 + 2bx = -3$

$3a(1)^2 + 2b(1) = -3$

$\boxed{3a + 2b = -3} \rightarrow ①$

$\boxed{2(-2) = 2a + 2b} \rightarrow ②$

بطرح المعادلتين

$3a + \cancel{2b} = -3$

$2a + \cancel{2b} = -4$

$a = 1$

$3a + 2b = -3$

$3 + 2b = -3$

$2b = -6$

$b = -3$

$m = \left(\frac{dy}{dx}\right)_{(1,-2)} = 3(1)(1)^2 + 2(-3)(1) = -3$

معادلة العمودي:

$y - y_1 = \frac{-1}{m}(x - x_1)$

$y + 2 = \frac{1}{3}(x - 1)$

$3y + 6 = x - 1$

$x - 3y - 7 = 0$

١٨) أوجد النقاط لـ $y = 4x^3 - 21x^2 + 30x$ المماس موازي لمحور x ثم أوجد معادلة العمودي عند كل نقطة

$\frac{dy}{dx} = 12x^2 - 42x + 30$

∵ المماس // لمحور x

∴ $m = 0$

$m = \left(\frac{dy}{dx}\right)_{(x,y)}$

$0 = 12x^2 - 42x + 30$

$(2x - 5)(x - 1) = 0$

٢٠) أوجد معادلتي المماس والعمودي لمنحنى $2x^2 + 2y^2 - 5x + 3y + 1 = 0$ عند $(1, -2)$

$4x + 4y\frac{dy}{dx} - 5 + 3\frac{dy}{dx} = 0$

$\frac{dy}{dx}(4y + 3) = -4x + 5$

$\frac{dy}{dx} = \frac{-4x + 5}{4y + 3}$

$m = \left(\frac{dy}{dx}\right)_{(1,-2)} = \frac{-4 + 5}{-8 + 3} = \frac{-1}{5}$

معادلة المماس:

$y - y_1 = m(x - x_1)$

$y + 2 = \frac{-1}{5}(x - 1)$

$5y + 10 = -x + 1$

$x + 5y + 9 = 0$

معادلة العمودي:

$y - y_1 = \frac{-1}{m}(x - x_1)$

$y + 2 = 5(x - 1)$

$y + 2 = 5x - 5$

$5x - y - 7 = 0$

مثال١: $s = t^3 - 9t^2 + 24t$ أوجد v بعد $5\,sec$

$v = \frac{ds}{dt} = 3t^2 - 18t + 24$

$v = 3(5)^2 - 18(5) + 24 = 9 \; cm/s$

مثال٢: $s = 5t + 7$، أوجد v

$v = \frac{ds}{dt} = 5 \; m/min$

مثال٣: $s = 4\sin 2t$ أوجد v و a عندما $t = \frac{\pi}{6}\,sec$

$v = \frac{ds}{dt} = 4\cos 2t\,(2) = 8\cos 2t$

$v\big|_{t=\frac{\pi}{6}} = 8\cos \cancel{2}\left(\frac{\pi}{\cancel{6}_3}\right) = 4 \; cm/s$

$a = \frac{dv}{dt} = 8(-2)\sin 2t = -16\sin 2t$

$a\big|_{t=\frac{\pi}{6}} = -16 \sin\frac{\pi}{3} = -8\sqrt{3} \; cm/s^2$

مثال٤: $s = t^3 - 3t^2 + 5t + 4$، أوجد s و v التي يقطعها الجسم عندما ينعدم التسارع:

$v = \frac{ds}{dt} = 3t^2 - 6t + 5$

$a = \frac{d^2s}{dt^2} = 6t - 6$

∵ التسارع ينعدم

∴ $a = 0$

$\frac{0}{6} = \frac{6t}{6} - \frac{6}{6}$

$0 = t - 1$

$t = 1$

$s\big|_{t=1} = (1)^3 - 3(1)^2 + 5(1) + 4 = 7 \; cm$

$v\big|_{t=1} = 3(1)^2 - 6(1) + 5 = 2 \; cm/s$

مثال٥: $s = 12t^2 - t^3$، a) متى ينعكس الجسم اتجاه الحركة؟

b) متى يصل الجسم إلى نقطة البداية؟

الحل

$\boxed{a}$ ∵ الجسم ينعكس اتجاه الحركة

∴ $v = 0$

$v = \frac{ds}{dt} = 24t - 3t^2$

$0 = \frac{24t}{3} - \frac{3t^2}{3}$

$0 = 8t - t^2$

$t(8 - t) = 0$

$t = 0$ (مرفوض) or $8 - t = 0$

$t = 8$

★ $t \notin (-\infty, 0]$

$s = 12(8)^2 - (8)^3 = 256 \; cm$

$\boxed{b}$ ∵ الجسم يصل إلى نقطة البداية

∴ $s = 0$

$0 = 12t^2 - t^3$

$t^2(12 - t) = 0$

$t^2 = 0$ or $12 - t = 0$

$t = 0$ (مرفوض) | $t = 12 \; s$

مثال٦: $s = 2 + \frac{t}{2} + \frac{t^2}{4}$،

a) v بعد $7\,sec$ من بدء الحركة؟

b) v بعد قطع $8m$ من نقطة الانطلاق؟

a) $s = 2 + \frac{1}{2}t + \frac{1}{4}t^2$

$v = s' = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}t$

$v = \frac{1}{2}(1 + t)$

$v\big|_{t=7} = \frac{1}{2}(1 + 7) = 4 \; m/s$

b) ∵ $s = 8$

∴ $8 = 2 + \frac{1}{2}t + \frac{1}{4}t^2$

$\frac{1}{4}t^2 + \frac{1}{2}t - 6 = 0$

$(t - 4)(t + 6) = 0$

$t = 4$ or $t = -6$ (مرفوض)

$v\big|_{t=4} = \frac{1}{2}(1 + 4) = 2.5 \; m/s$

/ /

مثال ٢: $s = 96t - 16t^2$ ، فأوجد

a) زمن وصول الجسم لأقصى ارتفاع؟

b) مجموعة قيم t التي تكون السرعة عندها أكبر من الصفر (حيث $t \geq 0$)؟

الحل

(a) ∵ الجسم يصل لأقصى ارتفاع

∴ $v = 0$

$v = \frac{ds}{dt} = 96 - 32t$

$\frac{0}{32} = \frac{96}{32} - \frac{32t}{32}$

$0 = 3 - t$

$t = 3s$

(b) أوجد t إذا $v > 0$ ، $t \geq 0$

$v = 96 - 32t$

$96 - 32t > 0$

$\frac{96}{32} > \frac{32t}{32}$

$3 > t$

$t \in [0, 3)$

مثال: $s = f(t) = \frac{1}{3}t^3 - 2t^2 + 3t$ ، أوجد a عندما $v = 0$

$v = s' = t^2 - 4t + 3$

∵ $v = 0$

$0 = t^2 - 4t + 3$

$(t-3)(t-1) = 0$

$t = 3s$ or $t = 1s$

$a = s'' = 2t - 4$

$a|_{t=1} = 2 - 4 = -2 m/s^2$

$a|_{t=3} = 6 - 4 = 2 m/s^2$

تمارين الكتاب ص 63

أوجد السرعة والتسارع "العجلة" في كل مما يأتي، حيث s بالأمتار والزمن t بالثواني:

① $s = t^2 - 3t$, $t = \frac{5}{2}$ sec

$v = 2t - 3$ $\quad v|_{t=\frac{5}{2}} = 2\left(\frac{5}{2}\right) - 3 = 2 m/s$

$a = 2$ $\quad a|_{t=\frac{5}{2}} = 2 m/s^2$

② $s = 3t^2 - 12t + 1$, $t = 2$ sec

$v = s' = 6t - 12$ $\quad v|_{t=2} = 6(2) - 12 = 0 m/s$

$a = s'' = 6$ $\quad a|_{t=2} = 6 m/s^2$

③ $s = 24 + 6t - t^3$, $t = 3$ sec

$v = \frac{ds}{dt} = -3t^2 + 6$ $\quad v|_{t=3} = -3(9) + 6 = -21 m/s$

$a = v' = -6t$ $\quad a|_{t=3} = -6(3) = -18 m/s^2$

④ $s = 2t^4 - 3t^3$, $t = \frac{1}{2}$ sec

$v = s' = 8t^3 - 9t^2$ $\quad v|_{t=\frac{1}{2}} = 8\left(\frac{1}{2}\right)^3 - 9\left(\frac{1}{2}\right)^2 = -1.25 m/s$

$a = s'' = 24t^2 - 18t$ $\quad a|_{t=0.5} = 24\left(\frac{1}{2}\right)^2 - 18\left(\frac{1}{2}\right) = -3 m/s^2$

⑤ $s = 2t^3 - \frac{5}{t}$, $t = 1$ sec

$s = 2t^3 - 5t^{-1}$

$v = s' = 6t^2 + 5t^{-2} = 6t^2 + \frac{5}{t^2}$

$v|_{t=1} = 6 + 5 = 11 m/s$

$a = s'' = 12t - 10t^{-3} = 12t - \frac{10}{t^3}$

$a|_{t=1} = 12 - 10 = 2 m/s^2$

/ /

6) إذا $s=t^3-12t^2+36t$ ، فأوجد

a) السرعة والتسارع عند أي لحظة؟

b) الإزاحة والتسارع في حالة السكون اللحظي؟

الحل

$\boxed{a}$

$v=\frac{ds}{dt}=3t^2-24t+36$

$a=\frac{d^2s}{dt^2}=6t-24$

$\boxed{b}$ ∵ هناك سكون لحظي

∴ $V=0$

$0=3t^2-24t+36$

$0=(t-6)(t-2)$

$t=6\ sec$ or $t=2\ sec$

$S|_{t=6}=(6)^3-12(6)^2+36(6)=0\ m$ | $S|_{t=2}=(2)^3-12(2)^2+36(2)=32m$

$a|_{t=6}=6(6)-24=12m/s^2$ | $a|_{t=2}=6(2)-24=-12m/s^2$

7) إذا $s=112t-16t^2$ ، فأوجد

a) سرعة الجسم وتسارعه بعد مرور 3sec؟

b) أقصى ارتفاع يصله الجسم؟

الحل

$\boxed{a}$

$V=\frac{ds}{dt}=112-32t$

$V|_{t=3}=16m/s$

$a=\frac{d^2s}{dt^2}=-32$

$a|_{t=3}=-32m/s^2$

$\boxed{b}$ ∵ الجسم يصل لأقصى ارتفاع

∴ $V=0$

$0=112-32t$

$32t=112$

$t=3.5sec$

$S|_{t=3.5}=112(3.5)-16(3.5)^2=196m$

8) إذا $s=t^3-6t^2+9t$ ، فأوجد التسارع عندما يتغير اتجاه الحركة؟

∵ اتجاه الحركة يتغير

∴ $V=0$

$V=\frac{ds}{dt}=3t^2-12t+9$

$\frac{0}{3}=\frac{3t^2}{3}-\frac{12t}{3}+\frac{9}{3}$

$0=t^2-4t+3$

$0=(t-3)(t-1)$

$t=1\ sec$ or $t=3\ sec$

$a=\frac{d^2s}{dt^2}=6t-12$ | $\frac{d^2s}{dt^2}=6t-12$

$a|_{t=1}=6-12=-6m/min^2$ | $a|_{t=3}=18-12=6\ m/min^2$

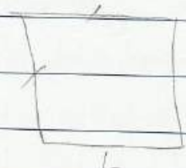
المعدلات الزمنية المرتبطة ص65

مثال1:

$\frac{dL}{dt}=0,03$

$\frac{dA}{dt}=?$

$L=10$



$A=L^2$

$\frac{dA}{dt}=2L\frac{dL}{dt}$

$\frac{dA}{dt}=2(10)(0,03)$

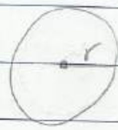
$=0,6\ cm^2/sec$

مثال2:

$\frac{dr}{dt}=0.5$

$\frac{dc}{dt}=?$

$r=4$



$c=2\pi r$

$\frac{dc}{dt}=2\pi\frac{dr}{dt}$

$=2\left(\frac{1}{2}\right)\pi$

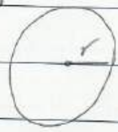
$=\pi\ m/sec$

مثال3:

$\frac{dr}{dt}=0,005$

$\frac{dA}{dt}=?$

$r=15$



$A=\pi r^2$

$\frac{dA}{dt}=2\pi r\frac{dr}{dt}$

$\frac{dA}{dt}=2(15)(0,005)\pi=0,15\pi\ cm^2/min$

مثال4: $\frac{dx}{dt}=\frac{1}{4}$ ، $y=x^2+2$

و $\frac{dy}{dt}=0.3$ ، أوجد موضع النقطة على المنحنى

$\frac{dy}{dt}=2x\frac{dx}{dt}$

$0.3=\cancel{2}x\left(\frac{1}{\cancel{4}_2}\right)$

$0.3=\frac{x}{2}$

$x=2(0.3)=0,6$

$y=(0,6)^2+2=2,36$

النقطة هي $(0,6\ ،2,36)$

مثال5:

$\frac{dv}{dt}=-600$ ، $\frac{dr}{dt}=?$

$\frac{dA}{dt}=?$ $r=300$

الحل

$V=\frac{4}{3}\pi r^3$

$\frac{dv}{dt}=4\pi r^2\frac{dr}{dt}$

$-600=4\pi(300)^2\frac{dr}{dt}$

$\frac{dr}{dt}=\frac{-600}{(300)^2(4\pi)}$

$\frac{dr}{dt}=\frac{-1}{600\pi}\ cm/sec$

$A=4\pi r^2$

$\frac{dA}{dt}=8\pi r\frac{dr}{dt}$

$\frac{dA}{dt}=8\pi(3\cancel{00})\left(\frac{-1}{\cancel{600}_2\pi}\right)$

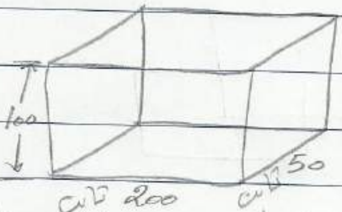
$=-4\ cm^2/sec$

مثال6:

$\frac{dv}{dt}=900$

$\frac{dh}{dt}=?$

متغير h



$V=200\times50(h)$

$V=10000h$

$\frac{dv}{dt}=10000\frac{dh}{dt}$

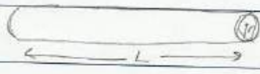
$900=10000\frac{dh}{dt}$

$\frac{dh}{dt}=\frac{900}{10000}=0,09\ cm/sec$

مثال7:

$\frac{dL}{dt}=0,005$ ، $\frac{dr}{dt}=0,001$

$\frac{dV}{dt}=?$ $L=40$ $r=2$



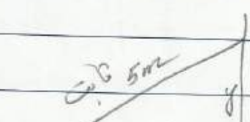
$V=\pi r^2L$

$\frac{dv}{dt}=\pi r^2\frac{dL}{dt}+L\left(2\pi r\frac{dr}{dt}\right)$

$=4\pi(0,005)+2(2)\pi(0,001)(40)=0,18\ cm^3/min$

مثال8:

$\frac{dx}{dt}=0,5$ ، $\frac{dy}{dt}=?$



$y=\sqrt{5^2-3^2}=4m$

$x^2+y^2=(5)^2$

$\frac{2x\frac{dx}{dt}}{2}+\frac{2y\frac{dy}{dt}}{2}=\frac{0}{2}$

$x\frac{dx}{dt}+y\frac{dy}{dt}=0$

$3\left(\frac{1}{2}\right)=-4\frac{dy}{dt}$

$\frac{dy}{dt}=\frac{\frac{3}{2}}{-4}=\frac{-3}{8}\ m/sec$

تمارين الكتاب ص ٧٠

(1) $\frac{dy}{dt}=0{,}2$, $\frac{dx}{dt}=0{,}1$ ، $y=x^2-6$

أوجد موضع النقطة؟

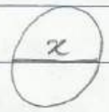
$\frac{dy}{dt}=2x\frac{dx}{dt} \Rightarrow 0{,}2=2x(0{,}1)$

$0{,}2=0{,}2x \Rightarrow x=1$

$y=(1)^2-6=-5 \Rightarrow (1,-5)$

(2) $\frac{dx}{dt}=-0{,}04$ ، $\frac{dA}{dt}=?$

$r=20$



الحل

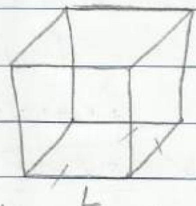
$\frac{dr}{dt}=\frac{-0{,}04}{2}=-0{,}02$

$A=\pi r^2 \Rightarrow \frac{dA}{dt}=2\pi r\frac{dr}{dt}$

$\frac{dA}{dt}=2\pi(20)(-0{,}02)=-0{,}8\ cm^2/min$

(3) $\frac{dL}{dt}=0{,}001$

$\frac{dv}{dt}=?$ $L=40$



الحل

$V=L^3 \Rightarrow \frac{dv}{dt}=3L^2\frac{dL}{dt}$

$\frac{dv}{dt}=3(40)^2(0{,}001)=4{,}8\ cm^3/sec$

(4) $\frac{dv}{dt}=-0{,}3$ ، $\frac{dr}{dt}=?$

$r=2$

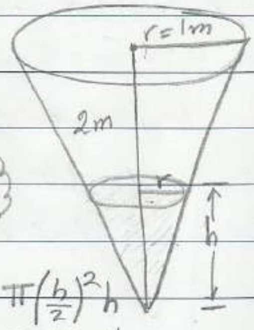
$V=\frac{4}{3}\pi r^3 \Rightarrow \frac{dv}{dt}=4\pi r^2\frac{dr}{dt}$

$-0{,}3=4\pi(2)^2\frac{dr}{dt}$

$\frac{dr}{dt}=\frac{-0{,}3}{8\pi}=\frac{-3}{80\pi}\ m/sec$

(5) $\frac{dv}{dt}=0{,}04$ ، $\frac{dh}{dt}=?$

$h=\frac{1}{2}m$



الحل

$\frac{1}{r}=\frac{2}{h} \Rightarrow r=\frac{h}{2}$

$V=\frac{1}{3}\pi r^2h \Rightarrow V=\frac{1}{3}\pi\left(\frac{h}{2}\right)^2h$

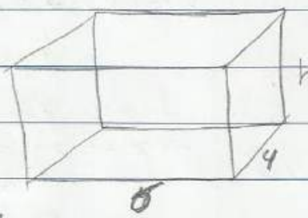
$V=\frac{1}{12}\pi h^3 \Rightarrow \frac{dv}{dt}=\frac{\pi}{4}h^2\frac{dh}{dt}$

$0{,}04=\frac{\pi}{4}\left(\frac{1}{2}\right)^2\left(\frac{dh}{dt}\right) \Rightarrow 0{,}04=\frac{\pi}{16}\frac{dh}{dt}$

$\frac{dh}{dt}=\frac{0{,}04\times16}{\pi}=\frac{16}{25\pi}\simeq0{,}2m/min$

(6) $\frac{dv}{dt}=-0{,}48$

$\frac{dh}{dt}=?$



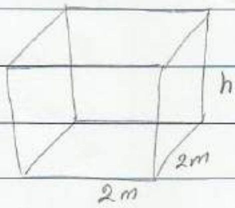
الحل

$V=6\times4\times h=24h$

$\frac{dv}{dt}=24\frac{dh}{dt} \Rightarrow -0{,}48=24\frac{dh}{dt}$

$\frac{dh}{dt}=-0{,}02\ m/min$

(7) $\frac{dv}{dt}=0{,}24$ $\frac{dh}{dt}=?$



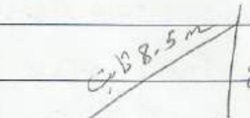
الحل

$V=2\times2\times h=4h$

$\frac{dv}{dt}=4\frac{dh}{dt} \Rightarrow 0{,}24=4\frac{dh}{dt} \Rightarrow \frac{dh}{dt}=0{,}06\ m/min$

(8) $\frac{dy}{dt}=-5$ ، $\frac{dx}{dt}=?$

$x=7{,}5m$



$y=\sqrt{(8.5)^2-(7.5)^2}=4m$

$x^2+y^2=(8{,}5)^2 \Rightarrow \frac{2x\frac{dx}{dt}+2y\frac{dy}{dt}}{2}=\frac{0}{2}$

$x\frac{dx}{dt}+y\frac{dy}{dt}=0 \Rightarrow (7{,}5)\frac{dx}{dt}+4(-5)=0$

$7{,}5\frac{dx}{dt}=20 \Rightarrow \frac{dx}{dt}=\frac{20}{7{,}5}=\frac{8}{3}\simeq2{,}7\ m/s$

مثال: ادرس اطراد الدالة $f(x)=x^2+5$

$f'(x)=2x$

الدالة متزايدة على $[0,\infty) \Leftarrow \forall x>0$

الدالة متناقصة على $(-\infty,0] \Leftarrow \forall x<0$

تدريب ① ص 72: ادرس اطراد كل دالة مما يأتي:

a) $f(x)=x^2-2x+5$

$f'(x)=2x-2$

$2x-2>0 \Rightarrow 2x>2 \Rightarrow x>1$

الدالة متزايدة على $[1,\infty)$

$2x-2<0 \Rightarrow 2x<2 \Rightarrow x<1$

الدالة متناقصة على $(-\infty,1]$

b) $f(x)=3+6x-2x^2$

$f'(x)=-4x+6$

$-4x+6>0 \Rightarrow -4x>-6 \Rightarrow x<1.5$

∴ الدالة متزايدة على $(-\infty,1.5]$

ومتناقصة على $[1.5,\infty)$

مثال 2: أوجد النقاط الحرجة للدالة

$f(x)=2x^3-3x^2+5$

$f'(x)=6x^2-6x$

$f'(x)=0$ لإيجاد النقاط الحرجة

$\frac{6x^2}{6}-\frac{6x}{6}=\frac{0}{6}$

$x^2-x=0$

$x(x-1)=0$

$x=0$ or $x=1$

$f(0)=5$	$f(1)=4$
$(0,5)$	$(1,4)$

تدريب ②: أوجد النقاط الحرجة للدالة

$f(x)=(x^2-2x-8)^2$

$f'(x)=2(x^2-2x-8)(2x-2)$

$f'(x)=(4x-4)(x^2-2x-8)$

تابع

$f'(x)=(4x-4)(x^2-2x-8)$

$f'(x)=4x^3-8x^2-32x-4x^2+8x+32$

$f'(x)=4x^3-12x^2-24x+32$

$f'(x)=0 \Rightarrow$ لإيجاد النقاط الحرجة

$\frac{4x^3}{2}-\frac{12x^2}{2}-\frac{24x}{2}+\frac{32}{2}=\frac{0}{2}$

$2x^3-6x^2-12x+16=0$

$x=-2$	$x=4$	$x=1$
$f(-2)=0$	$f(4)=0$	$f(1)=81$
$(-2,0)$	$(4,0)$	$(1,81)$

مثال 3: أوجد النقاط الحرجة، فترات التزايد والتناقص، النقاط الصغرى والعظمى المحلية للدالة

$f(x)=x^3-9x^2+24x$

① نوجد المشتقة الأولى

$f'(x)=3x^2-18x+24$

② نوجد النقاط الحرجة $f'(x)=0$

$\frac{3x^2}{3}-\frac{18x}{3}+\frac{24}{3}=\frac{0}{3} \Rightarrow x^2-6x+8=0$

$(x-4)(x-2)=0$

$x=4$	$x=2$
$f(4)=16$	$f(2)=20$
$(4,16)$	$(2,20)$

∴ النقطتان الحرجتان هما $(2,20)$ ، $(4,16)$

③ دراسة المشتقة الأولى

$-\infty \leftarrow$ نفس | 2 | عكس | 4 | نفس $\rightarrow \infty$

إشارة $f'(x)$	+	−	+
اطراد الدالة $f(x)$	↗	↘	↗

ن.ع.م ن.ص.م

تابع

الدالة متزايدة على $(-\infty,2] \cup [4,\infty)$

الدالة متناقصة على $[2,4]$

$(2,20)$ نقطة عظمى محلية أي للدالة قيمة عظمى محلية تساوي 20 عند $x=2$

$(4,16)$ نقطة صغرى محلية أي للدالة قيمة صغرى محلية تساوي 16 عند $x=4$

مثال 4: أوجد النقاط الحرجة ونوعها وادرس اطراد الدالة المنحنى

$$f(x)=\frac{3}{2}x^4+2x^3-3x^2-6x+\frac{9}{2}$$

① نوجد المشتقة الأولى

$$f'(x)=6x^3+6x^2-6x-6$$

② نوجد النقاط الحرجة $f'(x)=0$

$$\frac{6x^3}{6}+\frac{6x^2}{6}-\frac{6x}{6}-\frac{6}{6}=\frac{0}{6}$$

$$\therefore x^3+x^2-x-1=0$$

$$(x-1)(x+1)^2=0$$

$x-1=0$	$\sqrt{(x+1)^2}=\sqrt{0}$
$x=1$	$x+1=0$
$f(1)=-1$	$x=-1$
$(1,-1)$	$f(-1)=7$
	$(-1,7)$

$\therefore$ النقطتان الحرجتان هي $(1,-1),(-1,7)$

③ دراسة المشتقة الأولى

$-\infty$ … -1 … 1 … ∞ (قيم الاختبار: -3 ، 0 ، 3)

	$(-\infty,-1)$	$(-1,1)$	$(1,\infty)$
$f'(x)$ إشارة	$-$	$-$	$+$
اطراد الدالة $f(x)$	↘	↘	↗

ن.ص.م   تابع

الدالة متناقصة على $(-\infty,1]$

الدالة متزايدة على $[1,\infty)$

$(1,-1)$ نقطة صغرى محلية أي للدالة قيمة صغرى محلية تساوي -1 عند $x=1$

$(-1,7)$ ليست صغرى ولا عظمى محلية وإنما هي نقطة

مثال 5: أوجد b ، c ، d بحيث يحقق منحنى $f(x)=x^3+bx^2+cx+d$ الشرطين الآتيين يمر بنقطة الأصل وله نقطة حرجة عند $(4,16)$

$(0,0)$ تحقق معادلة المنحنى $\Leftarrow$ $d=0$

$(4,16)$ تحقق معادلة المنحنى $\Leftarrow$

$$16=(4)^3+(4)^2b+4c$$

$$\frac{16}{4}=\frac{64}{4}+\frac{16b}{4}+\frac{4c}{4}$$

$$4=16+4b+c$$

$$-12=4b+c \rightarrow ①$$

$(4,16)$ نقطة حرجة

$$f'(4)=0$$

$$f'(x)=3x^2+2bx+c$$

$$0=3(4)^2+2(4)b+c$$

$$0=48+8b+c$$

$$8b+c=-48 \rightarrow ②$$

بطرح المعادلة ① ، ② :

$$4b+\cancel{c}=-12$$

$$\ominus\ 8b+\cancel{c}=-48$$

$$-4b=36$$

$$b=-9$$

بالتعويض في المعادلة ①

$$-12=4(-9)+c \Rightarrow -12=-36+c$$

$$c=24$$

$$\therefore c=24,\ b=-9,\ d=0$$

/ /

تدريب ③: أوجد النقاط الحرجة وفترات التزايد والتناقص والنقاط الصغرى والعظمى المحلية للدالة $f(x)=x^3+x^2-5x+3$

① نوجد المشتقة الأولى

$f'(x)=3x^2+2x-5$

② نوجد النقاط الحرجة $f'(x)=0$

$3x^2+2x-5=0$

$(x-1)(3x+5)=0$

$x=1$	$x=\frac{-5}{3}$
$f(1)=0$	$f(\frac{-5}{3})=\frac{256}{27}\simeq 9,5$
$(1,0)$	$(\frac{-5}{3},9,5)$

∴ النقطتان الحرجتان هما $(\frac{-5}{3},9,5)$ ، $(1,0)$

③ دراسة المشتقة الأولى

نفس عكس نفس

	$\frac{-5}{3}$		1	
الإشارة $f'(x)$	+		−	+
اطراد الدالة $f(x)$	↗		↘	↗

الدالة متزايدة على $(-\infty,\frac{-5}{3}] \cup [1,\infty)$

ن.ع.م ن.ص.م

الدالة متناقصة على $[-\frac{5}{3},1]$

$(\frac{-5}{3},9,5)$ نقطة عظمى محلية أي الدالة قيمة عظمى محلية تساوي 9,5 عند $x=\frac{-5}{3}$

$(1,0)$ نقطة صغرى محلية أي الدالة قيمة صغرى محلية تساوي 0 عند $x=1$

مثال: جد نقطة الانقلاب وفترات التقعر للمنحنى $f(x)=x^3$

الحل

$f'(x)=3x^2 \Rightarrow f''(x)=6x$

نوجد نقطة الانقلاب $f''(x)=0$

$6x=0 \Rightarrow x=0$

$f(0)=0 \Rightarrow (0,0)$ نقطة الانقلاب

عكس نفس

	0	
إشارة $f''(x)$	−	+
تقعر منحنى $f(x)$	تقعر للأسفل	تقعر للأعلى

متقعر للأعلى في الفترة $(0,\infty)$

متقعر للأسفل في الفترة $(-\infty,0)$

مثال⑦: أوجد نقاط الانقلاب مبيناً فترات التقعر وكذلك تعرف نوع النقاط الحرجة باستعمال المشتقة الثانية للمنحنى $f(x)=x^4-6x^2-7$

① نوجد المشتقة الأولى $f'(x)=4x^3-12x$

② نوجد النقاط الحرجة $f'(x)=0$

$\frac{4x^3}{4}-\frac{12}{4}x=\frac{0}{4}$

$x^3-3x=0$

$x(x^2-3)=0$

$x=0$	$x^2=3$
$f(0)=-7$	$x=\pm\sqrt{3}$
$(0,-7)$	$f(\sqrt{3})=-16 \Rightarrow (\sqrt{3},-16)$
	$f(-\sqrt{3})=-16 \Rightarrow (-\sqrt{3},-16)$

∴ النقاط الحرجة هي $(\pm\sqrt{3},-16)$ ، $(0,-7)$

③ نوجد المشتقة الثانية $f''(x)=12x^2-12$

④ دراسة نوع النقاط الحرجة بالمشتقة الثانية

$f''(0)=-12<0 \Rightarrow (0,-7)$ نقطة عظمى محلية

$f''(-\sqrt{3})=24>0 \Rightarrow (-\sqrt{3},-16)$ نقطة صغرى محلية

$f''(\sqrt{3})=24>0 \Rightarrow (\sqrt{3},-16)$ نقطة صغرى محلية

تابع

/ /

⑤ نوجد نقاط الانقلاب $f''(x)=0$

$$\frac{12x^2}{12}-\frac{12}{12}=\frac{0}{12}$$

$$x^2-1=0$$

$$x^2=1$$

$$x=\pm 1$$

$$f(1)=-12 \Rightarrow (1,-12)$$

$$f(-1)=-12 \Rightarrow (-1,-12)$$

نقطتا انقلاب $(\pm 1,-12)$

⑥ دراسة فترات التقعر

$-\infty$ نفس عكس نفس ∞ (على خط الأعداد: -1 ، 1)

إشارة $f''(x)$	+	−	+
تقعر منحنى $f(x)$	تقعر لأعلى	تقعر لأسفل	تقعر لأعلى

متقعر لأعلى في الفترة $(-\infty,-1)\cup(1,\infty)$

متقعر لأسفل في الفترة $(-1,1)$

تمرين ⑦: أوجد نقاط الانقلاب إن وجدت مع تحديد نوع وفترات التقعر ثم بين نوع النقاط الحرجة باستعمال المشتقة الثانية للمنحنى

$$f(x)=1-3x^2+2x^3$$

الحل

$$f(x)=2x^3-3x^2+1$$

① نوجد المشتقة الأولى $f'(x)=6x^2-6x$

② نوجد النقاط الحرجة $f'(x)=0$

$$\frac{6x^2}{6}-\frac{6x}{6}=\frac{0}{6}$$

$$x^2-x=0$$

$$x(x-1)=0$$

$x=0$	$x=1$
$f(0)=1$	$f(1)=0$
$(0,1)$	$(1,0)$

∴ النقاط الحرجة هي $(0,1)$ ، $(1,0)$

③ نوجد المشتقة الثانية $f''(x)=12x-6$

④ دراسة نوع النقاط الحرجة باستخدام المشتقة الثانية

نقطة عظمى محلية $f''(0)=-6<0 \Rightarrow (0,1)$

نقطة صغرى محلية $f''(1)=6>0 \Rightarrow (1,0)$

∴ $(0,1)$ نقطة عظمى محلية أي للدالة قيمة عظمى محلية تساوي 1 عند $x=0$

و $(1,0)$ نقطة صغرى محلية أي للدالة قيمة صغرى محلية تساوي 0 عند $x=1$

⑤ نوجد نقاط الانقلاب $f''(x)=0$

$$\frac{12x}{6}-\frac{6}{6}=\frac{0}{6} \Rightarrow 2x-1=0$$

$$2x=1 \Rightarrow x=\frac{1}{2}$$

$$f\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2} \Rightarrow \left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$$ نقطة انقلاب

⑥ دراسة فترات التقعر

$-\infty$ عكس نفس ∞ (على خط الأعداد: $\frac{1}{2}$)

إشارة $f''(x)$	−	+
تقعر منحنى $f(x)$	تقعر لأسفل	تقعر لأعلى

متقعر لأعلى في الفترة $(\frac{1}{2},\infty)$

متقعر لأسفل في الفترة $(-\infty,\frac{1}{2})$

يتبع

ملاحظة: النقاط الحرجة تكون عندما المشتقة الأولى تساوي الصفر أو عندما تكون المشتقة الأولى غير معرفة في حالة الغير معرف لم نتطرق لها الكتاب $\Rightarrow$ $f(x) = \frac{x}{x+2}$ } النقاط الحرجة لها تكون عندما المشتقة الأولى ~~لا~~ تكون غير معرفة

مثال 8: عين قيمة a و b للاقتران $f(x) = x^3 + ax^2 + bx$ لكي يكون للدالة نقطة حرجة عند $x = 2$ ونقطة انقلاب عند $x = \frac{1}{2}$ ثم عين القيمة العظمى والصغرى المحلية للدالة

① لها نقطة حرجة عند $x = 2$

$\therefore f'(2) = 0$

$f'(x) = 3x^2 + 2ax + b$

$0 = (2)^2(3) + 2(2)a + b$

$0 = 12 + 4a + b$

$4a + b = -12 \rightarrow$ ①

② لها نقطة انقلاب عند $x = \frac{1}{2}$

$\therefore f''(\frac{1}{2}) = 0$

$f''(x) = 6x + 2a$

$0 = 6(\frac{1}{2}) + 2a$

$0 = 3 + 2a$

$2a = -3 \Rightarrow a = \frac{-3}{2}$

بالتعويض عن قيمة a في المعادلة ①

$4(\frac{-3}{2}) + b = -12$

$-6 + b = -12$

$b = -6$

$\therefore f'(x) = 3x^2 + \cancel{2}(\frac{-3}{\cancel{2}})x + (-6)$

$f'(x) = 3x^2 - 3x - 6$

لإيجاد النقاط الحرجة $f'(x) = 0$

$\frac{3x^2}{3} - \frac{3x}{3} - \frac{6}{3} = \frac{0}{3}$

$x^2 - x - 2 = 0$

$(x-2)(x+1) = 0$

$x = 2$	$x = -1$
$f(2) = -10$	$f(-1) = \frac{7}{2}$
$(2, -10)$	$(-1, \frac{7}{2})$

$\therefore$ النقطتان الحرجتان هما $(2,-10)$ ، $(-1, \frac{7}{2})$

دراسة النقاط الحرجة بالمشتقة الثانية

$f''(x) = 6x + \cancel{2}(\frac{-3}{\cancel{2}}) = 6x - 3$

$f''(2) = 9 > 0 \Rightarrow (2,-10)$ نقطة صغرى محلية

$f''(-1) = -9 < 0 \Rightarrow (-1, \frac{7}{2})$ نقطة عظمى محلية

$(2,-10)$ نقطة صغرى محلية أي للدالة قيمة صغرى محلية تساوي -10 عند $x = 2$

$(-1, \frac{7}{2})$ نقطة عظمى محلية أي للدالة قيمة عظمى محلية تساوي $\frac{7}{2}$ عند $x = -1$

مسائل الكتاب ص 83

أوجد النقاط الحرجة إن وجدت مبيناً نوعها ثم ادرس اطراد كل دالة مما يأتي

① $f(x) = 1 - (x-2)^2$

$f'(x) = -2(x-2)$

$f'(x) = 0$

$-2(x-2) = 0$

$x - 2 = 0$

$x = 2$

$f(2) = 1$

$\therefore$ نقطة حرجة $(2,1)$

$f''(x) = -2$

$f''(2) = -2 < 0 \Rightarrow$ قيمة عظمى

$\therefore (2,1)$ نقطة عظمى محلية أي للدالة قيمة عظمى تساوي 1 عند $x = 2$

$-2x + 4 > 0 \Rightarrow -2x > -4 \Rightarrow x < 2$

$\therefore$ الدالة متزايدة في $(-\infty, 2]$

الدالة متناقصة في $[2, \infty)$

② $f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 12x - 5$

$f'(x) = 6x^2 - 6x - 12$

$f'(x) = 0$

$\frac{6x^2}{6} - \frac{6x}{6} - \frac{12}{6} = \frac{0}{6}$

$x^2 - x - 2 = 0$

$(x-2)(x+1) = 0$

$x = 2$	$x = -1$
$f(2) = -25$	$f(-1) = 2$

$\therefore$ النقطتان الحرجتان هما $(2,-25)$ ، $(-1,2)$

$f''(x) = 12x - 6$

$f''(2) = 18 > 0$ قيمة صغرى

$f''(-1) = -18 < 0$ قيمة عظمى

$(2,-25)$ نقطة صغرى محلية أي الدالة قيمة صغرى محلية تساوي -25 عند $x = 2$

$(-1, 2)$ نقطة عظمى محلية أي للدالة قيمة عظمى محلية تساوي 2 عند $x = -1$

$\xleftarrow{\quad -1 \quad\quad 2 \quad}\!\!\rightarrow$ $\nearrow \; | \; \searrow \; | \; \nearrow$

متزايدة في $(-\infty,-1] \cup [2,\infty)$

متناقصة في $[-1, 2]$

/ /

(7) أوجد معادلة منحنى كثيرة الحدود من الدرجة الثانية حيث يمر بـ $(0,0)$ و $(2,12)$ وله نقطة حرجة عند $x=2$

نفرض أن الاقتران $f(x)=ax^2+bx+c$

$(0,0)$ تحقق معادلة المنحنى

$c=0$

$\therefore f(x)=ax^2+bx$

$(2,12)$ تحقق معادلة المنحنى

$\frac{12}{2}=\frac{4a}{2}+\frac{2b}{2}$

$6=2a+b$

له نقطة حرجة عند $x=2$

$f'(2)=0$

$f'(x)=2ax+b$

$0=4a+b$

$2a+\cancel{b}=6$

$\ominus\ 4a+\cancel{b}=0$

$-2a=6$

$a=-3$

$0=4(-3)+b$

$b=12$

$\therefore$ كثيرة الحدود هي $f(x)=-3x^2+12x$

(8) للاقتران $f(x)=ax^3+bx^2-12x$ نقطة حرجة عند $(1,0)$ ما قيم a, b؟

$(1,0)$ تحقق معادلة المنحنى

$0=a+b-12$

$a+b=12 \rightarrow (1)$

نقطة حرجة عند $x=1$

$f'(1)=0$

$f'(x)=3ax^2+2bx-12$

$0=3a+2b-12$

$2b+3a=12 \rightarrow (2)$

نضرب (1) في 2

$2a+2b=24 \rightarrow (3)$

نطرح (3) و (2)

$\cancel{2b}+3a=12$

$\ominus\ 2a+\cancel{2b}=24$

$a=-12$

$-12+b=12$

$b=24$

أوجد نقاط الانقلاب وفترات التقعر ونوعها ثم بين نوع النقاط الحرجة باستعمال المشتقة الثانية

(9) $f(x)=(x-2)^2$

$f'(x)=2(x-2)$

$f'(x)=0$

$2(x-2)=0$

$x-2=0$

$x=2$

$f(2)=0$

$\therefore (2,0)$ نقطة حرجة

$f''(x)=2$

$f''(2)=2>0$

$\therefore (2,0)$ نقطة صغرى محلية

أي للاقتران قيمة صغرى محلية تساوي 0 عند $x=2$

لإيجاد نقاط الانقلاب $f''(x)=0$

$2\neq 0$

$\therefore$ لا يوجد نقاط انقلاب ولا فترات تقعر

$f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x + 5$ (10)

$f'(x) = 3x^2 - 6x - 9$

$f'(x) = 0$

$\frac{3}{3}x^2 - \frac{6}{3}x - \frac{9}{3} = \frac{0}{3}$

$x^2 - 2x - 3 = 0$

$(x-3)(x+1) = 0$

$x = 3 \mid x = -1$

$f(3) = -22 \mid f(-1) = 10$

∴ النقطتان الحرجتان هما

$(3,-22)$, $(-1,10)$

$f''(x) = 6x - 6$

$f''(3) = 12 > 0$

∴ $(3,-22)$ نقطة صغرى محلية أي

الدالة فيها صغرى محلية تساوي

-22 عند $x=3$

$f''(-1) = -12 < 0$

∴ $(-1,10)$ نقطة عظمى محلية أي

الدالة فيها عظمى محلية تساوي

10 عند $x=-1$

$f''(x) = 0$

$6x - 6 = 0$

$6x = 6$

$x = 1$

$f(1) = -6$

$(1,-6)$ نقطة انقلاب

نفس عكس

	1	
إشارة $f''(x)$	$-$	$+$
تقعر منحنى $f(x)$	لأسفل	لأعلى

مقعر لأعلى في الفترة $(1,\infty)$

مقعر لأسفل في الفترة $(-\infty,1)$

$f(x) = (x-3)^3$ (11)

$f'(x) = 3(x-3)^2$

$f'(x) = 0$

$3(x-3)^2 = 0$

$(x-3)^2 = 0$

$x - 3 = 0$

$x = 3$

$f(3) = 0$

∴ $(3,0)$ نقطة حرجة

$f''(x) = 6(x-3)$

$f''(3) = 0$

∴ $(3,0)$ نقطة انقلاب

نفس عكس

	3	
إشارة $f''(x)$	$-$	$+$
تقعر منحنى $f(x)$	لأسفل	لأعلى

مقعر لأعلى في الفترة $(3,\infty)$

مقعر لأسفل في الفترة $(-\infty,3)$

$f(x) = 4x^3 - x^4$ (12)

$f'(x) = 12x^2 - 4x^3$

$f'(x) = 0$

$\frac{12x^2}{4} - \frac{4x^3}{4} = \frac{0}{4}$

$3x^2 - x^3 = 0$

$x^2(3-x) = 0$

$x^2 = 0 \mid 3 - x = 0$

$x = 0 \mid x = 3$

$f(0) = 0 \mid f(3) = 27$

∴ النقطتان الحرجتان هما

$(0,0)$, $(3,27)$

	0	3	
اشارة $f'(x)$	$+$	$+$	$-$
اطراد الدالة $f(x)$	تزايد	تزايد	تناقص

ن.ع.م

الدالة متزايدة على $(-\infty, 0]$

الدالة متناقصة على $[3,\infty)$

$(0,0)$ نقطة حرجة

$(3,27)$ نقطة عظمى محلية أي الدالة فيها عظمى محلية تساوي 27 عند $x=3$

$f''(x) = 24x - 12x^2$

$f''(x) = 0$

$\frac{24x}{12} - \frac{12x^2}{12} = \frac{0}{12}$

$2x - x^2 = 0$

$x(2-x) = 0$

$x = 0 \mid x = 2$

$f(0) = 0 \mid f(2) = 16$

	0	2	
اشارة $f''(x)$	$-$	$+$	$-$
تقعر منحنى $f(x)$	لأسفل	لأعلى	لأسفل

مقعر لأعلى في $(0,2)$

مقعر لأسفل في $(-\infty,0) \cup (2,\infty)$

/ /

(13) $f(x) = \frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{3}x^3 - 8x^2 - 16x + 1$

$f'(x) = x^3 + x^2 - 16x - 16$

$f'(x) = 0$

$x^3 + x^2 - 16x - 16 = 0$

$(x-4)(x+1)(x+4) = 0$

$x = 4$ | $x = -1$ | $x = -4$

$f(4) = \frac{-317}{3}$ | $f(-1) = \frac{107}{12}$ | $f(-4) = -\frac{61}{3}$

∴ النقاط الحرجة هي $(4, \frac{-317}{3})$ و $(-1, \frac{107}{12})$ و $(-4, \frac{-61}{3})$

$f''(x) = 3x^2 + 2x - 16$

$f''(4) = 40 > 0 \Rightarrow$ ∴ $(4, \frac{-317}{3})$ نقطة صغرى محلية

أي للاقتران قيمة صغرى محلية تساوي $\frac{-317}{3}$ عند $x = 4$

$f''(-1) = -15 < 0 \Rightarrow$ ∴ $(-1, \frac{107}{12})$ نقطة عظمى محلية

أي للاقتران قيمة عظمى محلية تساوي $\frac{107}{12}$ عند $x = -1$

$f''(-4) = 24 > 0 \Rightarrow$ ∴ $(-4, \frac{-61}{3})$ نقطة صغرى محلية

أي للاقتران قيمة صغرى محلية تساوي $\frac{-61}{3}$ عند $x = -4$

$f''(x) = 0$

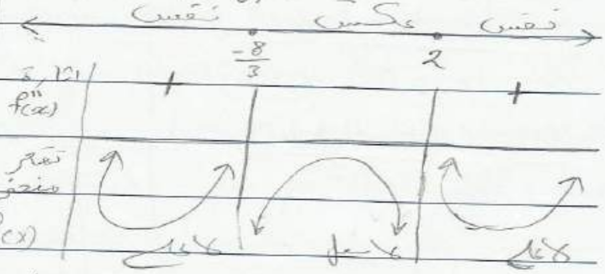
$3x^2 + 2x - 16 = 0$

$(x-2)(3x+8) = 0$

$x = 2$ | $x = -\frac{8}{3}$

$f(2) = \frac{-169}{3}$ | $f(\frac{-8}{3}) = \frac{-559}{81}$

∴ نقاط الانقلاب هي $(2, \frac{-169}{3})$ و $(\frac{-8}{3}, \frac{-559}{81})$



مقعر للأعلى في الفترة $(-\infty, \frac{-8}{3}) \cup (2, \infty)$

مقعر للأسفل في الفترة $(\frac{-8}{3}, 2)$

(14) عين a و b لكي يكون للاقتران

$f(x) = ax^3 + bx^2 + 6x + 2$

نقطة حرجة عند $x = 1$ ونقطة انقلاب عند $x = 1$

$f'(x) = 3ax^2 + 2bx + 6$ | $f''(x) = 6ax + 2b$

$f'(1) = 0$ | $f''(1) = 0$

$0 = 3a + 2b + 6$ | $0 = 6a + 2b$

$3a + 2b = -6$

بطرح المعادلتين

$6a + \cancel{2b} = 0$

$\ominus\ 3a + \cancel{2b} = -6$

$3a = 6$

$a = 2$

$3(2) + 2b = -6$

$6 + 2b = -6$

$2b = -12$

$b = -6$

(15) عين a, b, c لكي يكون للاقتران $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx$ نقطة حرجة عند $x = 1$ ونقطة انقلاب عند $x = \frac{1}{2}$ ويمر المنحنى بـ $(1, 13)$

$f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$

$f'(1) = 0$

$0 = 3a + 2b + c \rightarrow ①$

$f''(x) = 6ax + 2b$

$f''(\frac{1}{2}) = 0$

$0 = 3a + 2b \rightarrow ②$

$(1, 13) \Rightarrow$ نعوض في معادلة المنحنى

$13 = a + b + c \rightarrow ③$

بطرح ① و ②

$\cancel{3a} + \cancel{2b} + c = 0$

$\ominus\ \cancel{3a} + \cancel{2b} = 0$

$c = 0$

بضرب المعادلة ③ في 2

$26 = 2a + 2b + 2(0)$

$2a + 2b = 26 \rightarrow ④$

بطرح ① و ④

$3a + \cancel{2b} = 0$

$\ominus\ 2a + \cancel{2b} = 26$

$a = -26$

$13 = a + b + c$

$13 = -26 + b$

$b = 39$

∴ $c = 0$, $b = 39$, $a = -26$

والاقتران هو $f(x) = -26x^3 + 39x^2$

مثال①: $f(x)=x(x-3)^2$ حدد فترات التزايد والتناقص والنقاط العظمى والصغرى المحلية ونقاط الانقلاب والتقعر وارسم الدالة

$f'(x)=x\left[2(x-3)\right]+(x-3)^2$

$f'(x)=2x(x-3)+(x-3)^2$

$f'(x)=2x^2-6x+x^2-6x+9$

$f'(x)=3x^2-12x+9$

$f'(x)=0$

$\frac{3x^2}{3}-\frac{12x}{3}+\frac{9}{3}=\frac{0}{3}$

$x^2-4x+3=0$

$(x-3)(x-1)=0$

$x=3$ | $x=1$

$f(3)=0$ | $f(1)=4$

∴ النقطتان الحرجتان هما $(3,0),(1,4)$

$-\infty \longleftarrow 1 \quad 3 \longrightarrow \infty$

اشارة $f'(x)$	+	−	+
اطراد الدالة $f(x)$	متزايدة	متناقصة	متزايدة

ن ع م (عند 1) — ن ص م (عند 3)

الدالة متزايدة على $(-\infty,1]\cup[3,\infty)$

الدالة متناقصة على $[1,3]$

$(1,4)$ نقطة عظمى محلية أي للدالة قيمة عظمى محلية تساوي 4 عند $x=1$

$(3,0)$ نقطة صغرى محلية أي للدالة قيمة صغرى محلية تساوي 0 عند $x=3$

$f''(x)=6x-12$

$f''(x)=0$

$\frac{6x}{6}-\frac{12}{6}=\frac{0}{6}$

$x-2=0$

$x=2$

$f(2)=2 \Rightarrow$ ∴ $(2,2)$ نقطة انقلاب

$\longleftarrow 2 \longrightarrow$

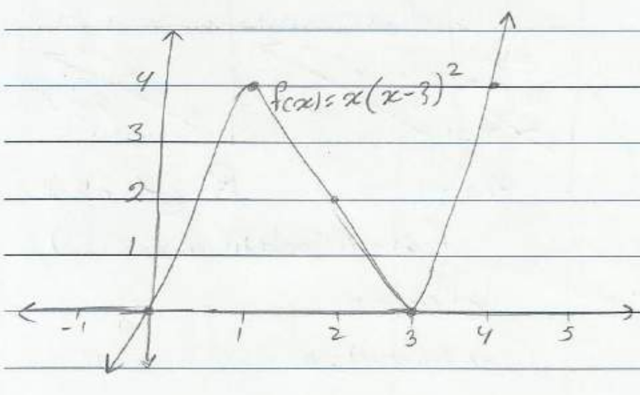
اشارة $f''(x)$	−	+
تقعر منحنى $f(x)$	لاسفل	لاعلى

مقعر لاعلى في $(2,\infty)$

مقعر لاسفل في $(-\infty,2)$

نقطة الانقلاب

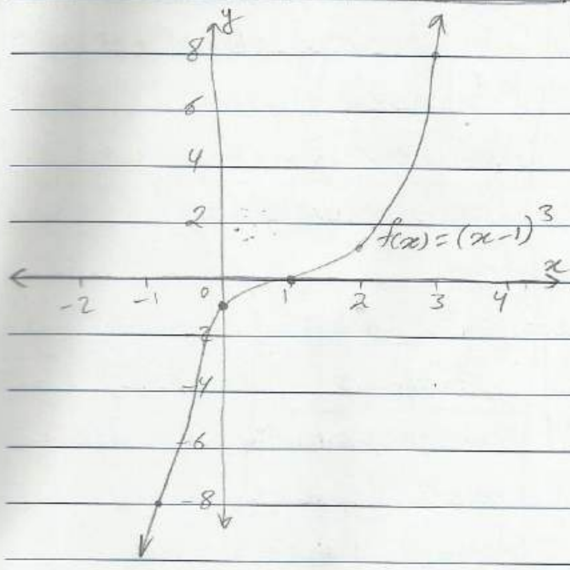
x	-1	0	1	2	3	4	5
$f(x)$	-16	0	4	2	0	4	20



/ /

مثال ⑨ : $f(x)=(x-1)^3$ "[illegible]"

x	-2	-1	0	1	2	3	4
$f(x)$	-27	-8	-1	0	1	8	27



$f'(x)=3(x-1)^2$

$f'(x)=0$

$3(x-1)^2=0$

$(x-1)^2=0$

$x-1=0$

$x=1$

$f(1)=0$

∴ $(1,0)$ نقطة حرجة

	$-\infty$ ← ثقس	1	ثقس → ∞
إشارة $f'(x)$	$+$		$+$
اطراد منحنى $f(x)$	متزايدة		متزايدة

∴ الدالة على R

$f''(x)=6(x-1)$

$f''(x)=0$

$6(x-1)=0$

$x-1=0$

$x=1$

$f(1)=0$

∴ $(1,0)$ نقطة انقلاب

		1	
إشارة $f''(x)$	$-$		$+$
تقعر منحنى $f(x)$	لأسفل		لأعلى

متقعر لأعلى في $(1,\infty)$

متقعر لأسفل في $(-\infty,1)$

مثال ④: $f(x)=1+12x-x^3$ "مثل المطلوب في مثال ①"

$f(x)=-x^3+12x+1$

$f'(x)=-3x^2+12$

$f'(x)=0$

$\frac{-3}{3}x^2+\frac{12}{3}=\frac{0}{3}$

$-x^2+4=0$

$x^2=4$

$x=2$	$x=-2$
$f(2)=17$	$f(-2)=15$

∴ النقطتان الحرجتان هما $(2,17)$, $(-2,15)$

	-2		2	
إشارة $f'(x)$	$-$	$+$	$-$
اطراد منحنى $f(x)$	تناقص	تزايد	تناقص

ن.ص.م   ن.ع.م

الدالة متزايدة على $[-2,2]$

الدالة متناقصة على $(-\infty,-2]\cup[2,\infty)$

$(-2,15)$ نقطة صغرى محلية أي الدالة قيمة صغرى محلية تساوي 15 عند $x=-2$

$(2,17)$ نقطة عظمى محلية أي الدالة قيمة عظمى محلية تساوي 17 عند $x=2$

$f''(x)=-6x$

$f''(x)=0$

$-6x=0$

$x=0$

$f(0)=1$

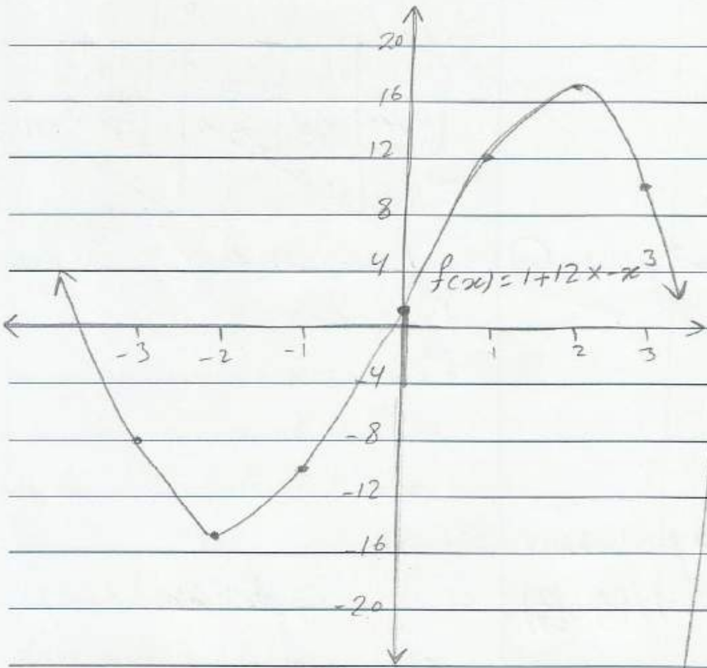
∴ $(0,1)$ نقطة انقلاب

	0	
إشارة $f''(x)$	$+$	$-$
تقعر منحنى $f(x)$	لأعلى	لأسفل

مقعر لأعلى في $(-\infty,0)$

مقعر لأسفل في $(0,\infty)$

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
$f(x)$	-8	-15	-10	1	12	17	10



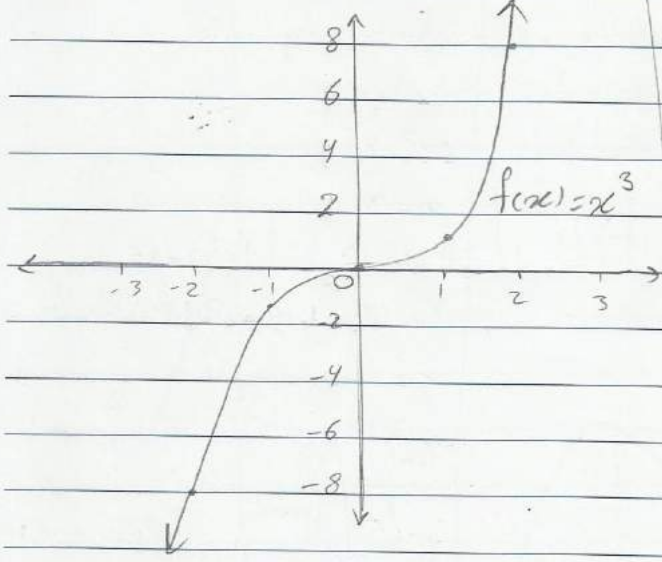
/ /

تمارين الكتاب ص 88

حدد فترات التزايد والتناقص والنقاط العظمى والصغرى المحلية ونقاط الانقلاب وتقعر المنحنى ونوعه ثم مثل الدالة بصورة تقريبية :

① $f(x)=x^3$

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
$f(x)$	-27	-8	-1	0	1	8	27



$f'(x)=3x^2$

$f'(x)=0$

$3x^2=0$

$x=0$

$f(0)=0$

∴ $(0,0)$ نقطة حرجة

	0	
إشارة $f'(x)$	+	+
اطراد الدالة $f(x)$	تزايد	تزايد

∴ الدالة متزايدة على $(-\infty,\infty)$

$f''(x)=6x$

$f''(x)=0$

$6x=0$

$x=0$

$f(0)=0$

∴ $(0,0)$ نقطة انقلاب

	0	
إشارة $f''(x)$	−	+
تقعر المنحنى $f(x)$	لأسفل	لأعلى

متقعر لأعلى في $(0,\infty)$

متقعر لأسفل في $(-\infty,0)$

② $f(x)=x^3-4x^2+4x$

$f'(x)=3x^2-8x+4$

$f'(x)=0$

$3x^2-8x+4=0$

$(x-2)(3x-2)=0$

$x=2$ | $x=\frac{2}{3}$ ∴ النقطتان الحرجتان هما

$f(2)=0$ | $f(\frac{2}{3})=\frac{32}{27}$ $\Rightarrow (2,0),(\frac{2}{3},\frac{32}{27})$

	$\frac{2}{3}$	2	
إشارة $f'(x)$	+	−	+
اطراد منحنى $f(x)$	متزايدة	متناقصة	متزايدة

ق.ع.م ، ق.ص.م

الدالة متزايدة على $(-\infty,\frac{2}{3}]\cup[2,\infty)$

الدالة متناقصة على $[\frac{2}{3},2]$

/ /

$\left(\frac{2}{3}, \frac{32}{27}\right)$ نقطة عظمى محلية أي الدالة

قيمة عظمى محلية تساوي $\frac{32}{27}$ عند $x = \frac{2}{3}$

$(2, 0)$ نقطة صغرى محلية أي الدالة

قيمة صغرى محلية تساوي 0 عند $x = 2$

$f''(x) = 6x - 8$

$f''(x) = 0$

$\frac{6x}{2} - \frac{8}{2} = \frac{0}{2}$

$3x - 4 = 0$

$x = \frac{4}{3}$

$f\left(\frac{4}{3}\right) = \frac{16}{27}$

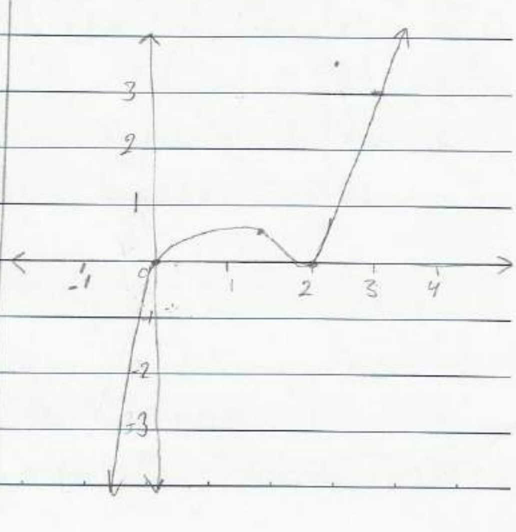
$\therefore \left(\frac{4}{3}, \frac{16}{27}\right)$ نقطة انقلاب

	$(-\infty, \frac{4}{3})$	$(\frac{4}{3}, \infty)$
اشارة $f''(x)$	−	+
تقعر منحنى $f(x)$	لأسفل	لأعلى

مقعر لأعلى في $\left(\frac{4}{3}, \infty\right)$

مقعر لأسفل في $\left(-\infty, \frac{4}{3}\right)$

x	-2	-1	0	$\frac{4}{3}$	2	3	4
$f(x)$	-32	-9	0	$\frac{16}{27}$	0	3	16



③ $f(x) = 3x^2 - x^3$

$f'(x) = 6x - 3x^2$

$f'(x) = 0$

$\frac{6x}{3} - \frac{3x^2}{3} = \frac{0}{3}$

$2x - x^2 = 0$

$x(2 - x) = 0$

$x = 0 \quad , \quad x = 2$

$f(0) = 0 \quad , \quad f(2) = 4$

$\therefore$ النقطتان الحرجتان هما $(0,0)$ و $(2,4)$

	$(-\infty, 0)$	$(0, 2)$	$(2, \infty)$
اشارة $f'(x)$	−	+	−
اطراد الدالة $f(x)$	تناقص	تزايد	تناقص

$f''(x) = 6 - 6x$

$f''(x) = 0$

$\frac{6}{6} - \frac{6x}{6} = \frac{0}{6}$

$1 - x = 0$

$x = 1$

$f(1) = 2$

$\therefore (1, 2)$ نقطة انقلاب

	$(-\infty, 1)$	$(1, \infty)$
اشارة $f''(x)$	+	−
تقعر منحنى $f(x)$	لأعلى	لأسفل

مقعر لأعلى في $(-\infty, 1)$

مقعر لأسفل في $(1, \infty)$

/ /

$6(1-x)=0$

$1-x=0$

$x=1$

$f(1)=0$

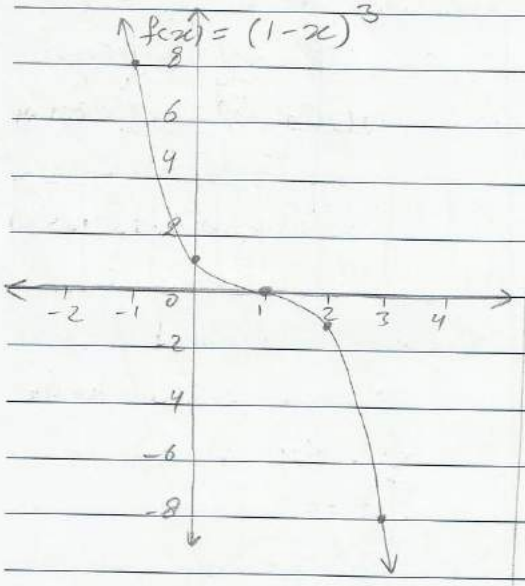
$\therefore$ $(1,0)$ نقطة انقلاب

		1	
اشارة $f''(x)$	+		−
تقعر منحنى $f(x)$	لأعلى		لأسفل

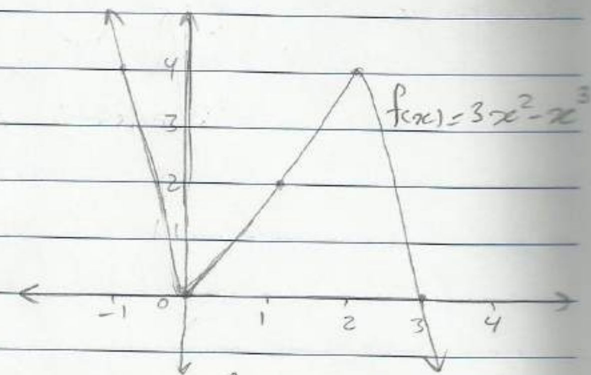
متقعر لأعلى في $(-\infty,1)$

متقعر لأسفل في $(1,\infty)$

x	−2	−1	0	1	2	3	4
$f(x)$	27	8	1	0	−1	−8	−27



x	−2	−1	0	1	2	3	4
$f(x)$	20	4	0	2	4	0	−16



(4)

$f(x)=(1-x)^3$

$f'(x)=3(1-x)^2(-1)$

$f'(x)=-3(1-x)^2$

$f'(x)=0$

$-3(1-x)^2=0$

$(1-x)^2=0$

$1-x=0$

$x=1$

$f(1)=0$

$\therefore$ $(1,0)$ نقطة حرجة

		1	
اشارة $f'(x)$	−		−
اطراد الدالة $f(x)$	تناقص		تناقص

الدالة متناقصة على R

$f''(x)=-6\cdot(1-x)(-1)$

$f''(x)=6(1-x)$

$f''(x)=0$

⑤ $f(x)=x(x-3)^2+1$

$f'(x)=x\left[2(x-3)\right]+(x-3)^2$

$f'(x)=2x(x-3)+(x-3)^2$

$f'(x)=2x^2-6x+x^2-6x+9$

$f'(x)=3x^2-12x+9$

$f'(x)=0$

$\frac{3}{3}x^2-\frac{12}{3}x+\frac{9}{3}=\frac{0}{3}$

$x^2-4x+3=0$

$(x-3)(x-1)=0$

$x=3 \quad | \quad x=1$

$f(3)=1 \quad | \quad f(1)=5$

∴ النقطتان الحرجتان هما $(1,5)$ و $(3,1)$

	$(-\infty,1)$	$(1,3)$	$(3,\infty)$
إشارة $f'(x)$	+	−	+
اطراد الدالة $f(x)$	تزايد	تناقص	تزايد

ن.ع.م عند 1، ن.ص.م عند 3

⑥ الدالة متزايدة على $(-\infty,1]\cup[3,\infty)$

الدالة متناقصة على $[1,3]$

$(1,5)$ نقطة عظمى محلية أي للدالة قيمة عظمى محلية تساوي 5 عند $x=1$

$(3,1)$ نقطة صغرى محلية أي للدالة قيمة صغرى محلية تساوي 1 عند $x=3$

$f''(x)=6x-12$

$f''(x)=0$

$\frac{6x}{6}-\frac{12}{6}=\frac{0}{6}$

$x-2=0$

$x=2$

$f(2)=3$

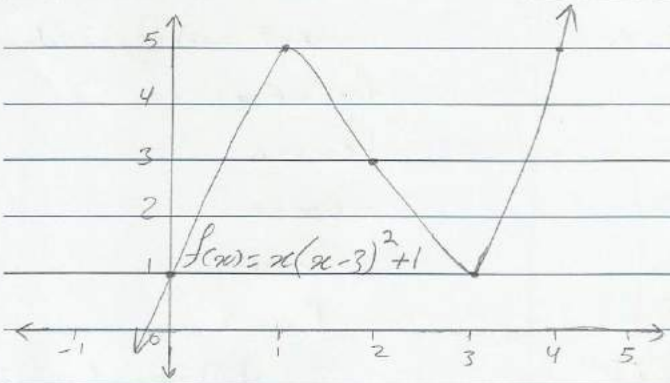
∴ $(2,3)$ نقطة انقلاب

	$(-\infty,2)$	$(2,\infty)$
إشارة $f''(x)$	−	+
تقعر $f(x)$	مقعر لأسفل	مقعر لأعلى

مقعر لأعلى في $(2,\infty)$

مقعر لأسفل في $(-\infty,2)$

x	−1	0	1	2	3	4	5
$f(x)$	−15	1	5	3	1	5	21



$f(x)=(x+1)^2(x-2)+5$

$f'(x)=(x+1)^2(1)+(x-2)\left[2(x+1)\right]$

$f'(x)=(x+1)^2+(x-2)(2x+2)$

$f'(x)=x^2+\cancel{2x}+1+2x^2+\cancel{2x}-4x-4$

$f'(x)=3x^2-3$

$f'(x)=0$

$\frac{3x^2}{3}-\frac{3}{3}=\frac{0}{3}$

$x^2-1=0$

$x^2=1$

$x=1 \quad | \quad x=-1$

$f(1)=1 \quad | \quad f(-1)=5$

∴ النقطتان الحرجتان هما $(1,1)$ و $(-1,5)$

/ /

$f'(x)$ إشارة	+	−	+
	$x<-1$	$-1<x<1$	$x>1$
اطراد الدالة $f(x)$	تزايد	تناقص	تزايد

ن.ع.م (عند -1)، ن.ص.م (عند 1)

الدالة متزايدة على $(-\infty,-1] \cup [1,\infty)$

الدالة متناقصة على $[-1,1]$

(7) $(-1,5)$ نقطة عظمى محلية أي الدالة فيها عظمى محلية تساوي 5 عند $x=-1$

$(1,1)$ نقطة صغرى محلية أي الدالة فيها صغرى محلية تساوي 1 عند $x=1$

$f''(x)=6x$

$f''(x)=0$

$6x=0$

$x=0$

$f(0)=3$

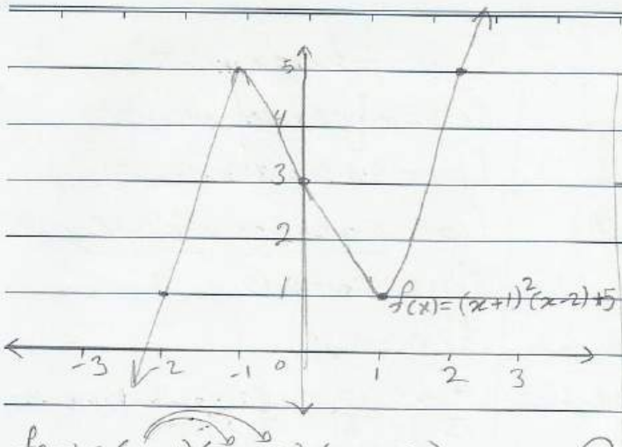
∴ $(0,3)$ نقطة انقلاب

$f''(x)$ إشارة	−	+
	$x<0$	$x>0$
تقعر منحنى $f(x)$	لأسفل	لأعلى

مقعر لأعلى في $(0,\infty)$

مقعر لأسفل في $(-\infty,0)$

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
$f(x)$	-15	1	5	3	1	5	21



$f(x)=(x-1)(x-2)(x-3)$

$f(x)=(x^2-2x-x+2)(x-3)$

$f(x)=(x^2-3x+2)(x-3)$

$f(x)=x^3-3x^2+2x-3x^2+9x-6$

$f(x)=x^3-6x^2+11x-6$

$f'(x)=3x^2-12x+11$

$f'(x)=0$

$3x^2-12x+11=0$

$x=\frac{6+\sqrt{3}}{3}$ | $x=\frac{6-\sqrt{3}}{3}$

$f\left(\frac{6+\sqrt{3}}{3}\right)=\frac{-2\sqrt{3}}{9}$ | $f\left(\frac{6-\sqrt{3}}{3}\right)=\frac{2\sqrt{3}}{9}$

∴ النقطتان الحرجتان هما $\left(\frac{6-\sqrt{3}}{3},\frac{2\sqrt{3}}{9}\right)$, $\left(\frac{6+\sqrt{3}}{3},\frac{-2\sqrt{3}}{9}\right)$

$f'(x)$ إشارة	+	−	+
	$x<\frac{6-\sqrt{3}}{3}$	$\frac{6-\sqrt{3}}{3}<x<\frac{6+\sqrt{3}}{3}$	$x>\frac{6+\sqrt{3}}{3}$
اطراد الدالة $f(x)$	تزايد	تناقص	تزايد

ن.ع.م ، ن.ص.م

الدالة متزايدة على $\left(-\infty,\frac{6-\sqrt{3}}{3}\right] \cup \left[\frac{6+\sqrt{3}}{3},\infty\right)$

الدالة متناقصة على $\left[\frac{6-\sqrt{3}}{3},\frac{6+\sqrt{3}}{3}\right]$

$\left(\frac{6-\sqrt{3}}{3},\frac{2\sqrt{3}}{9}\right)$ نقطة عظمى محلية أي للدالة قيمة عظمى محلية تساوي $\frac{2\sqrt{3}}{9}$ عند $x=\frac{6-\sqrt{3}}{3}$

$\left(\frac{6+\sqrt{3}}{3},\frac{-2\sqrt{3}}{9}\right)$ نقطة صغرى محلية أي للدالة قيمة صغرى محلية تساوي $\frac{-2\sqrt{3}}{9}$ عند $x=\frac{6+\sqrt{3}}{3}$

تابع

/ /

$f''(x) = 6x - 12$

$f''(x) = 0$

$\frac{6x}{6} - \frac{12}{6} = \frac{0}{6}$

$x - 2 = 0$

$x = 2$

$f(2) = 0$

$\therefore$ (2,0) نقطة انقلاب

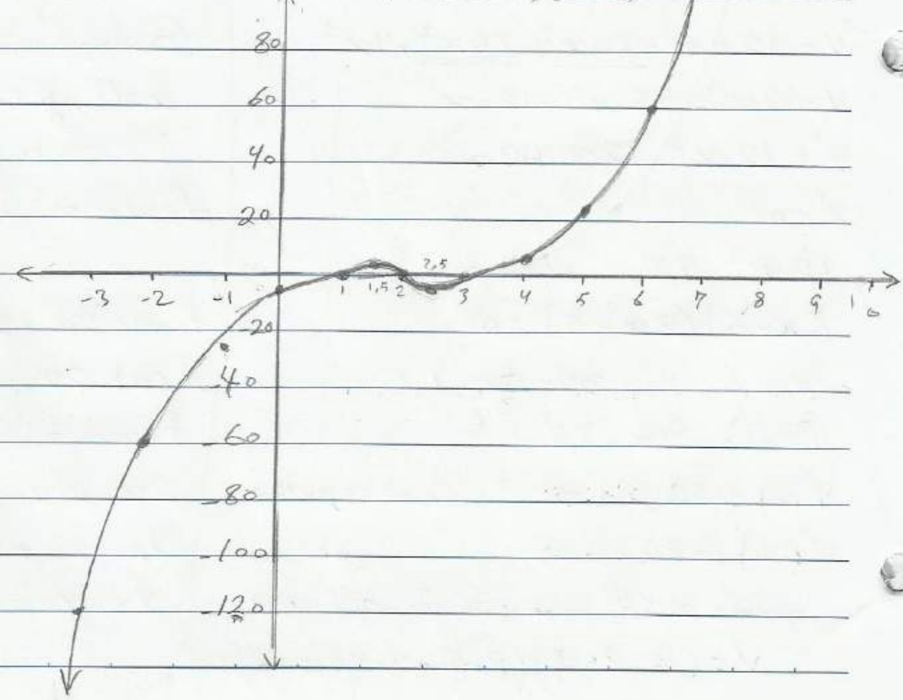
	0	
اشارة $f''(x)$	$-$	$+$
تقعر منحنى $f(x)$	لأسفل	لأعلى

متقعر لأعلى في $(0, \infty)$

متقعر لأسفل في $(-\infty, 0)$

x	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5	6
$f(x)$	-120	-60	-24	-6	0	0	0	6	24	60

$f(x) = (x-1)(x-2)(x-3)$



مثال ①: عددان موجبان مجموعهما 20 أوجد العددين إذا كان

a) حاصل ضربهما أكبر ما يمكن

b) مجموع مربعيهما أصغر ما يمكن

الحل

a) $x+y=20$

$y=20-x$

∴ العددان هما x و $20-x$

$f(x)=xy$

$=x(20-x)$

$=20x-x^2$

$f'(x)=20-2x$

$f'(x)=0$

$20-2x=0$

$20=2x$

$x=10$

$f''(x)=-2$

$f''(10)=-2>0 \Rightarrow$ قيمة عظمى

∴ حاصل الضرب يكون أكبر ما يمكن عند $x=10,\ y=20-10=10$

⇐ العددان هما 10 و 10

b) $f(x)=x^2+y^2$

$=x^2+(20-x)^2$

$f'(x)=2x+2(20-x)(-1)$

$f'(x)=2x-2(20-x)$

$f'(x)=0$

$2x-2(20-x)=0$

$2x-40+2x=0$

$4x-40=0$

$4x=40$

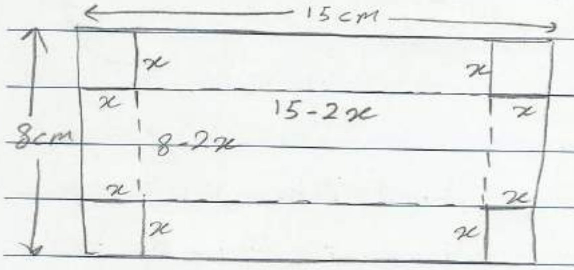
$x=10$

$f''(x)=2-2(-1)=2+2=4>0 \Rightarrow$ قيمة صغرى

∴ مربع المجموع لكليهما يكون أصغر ما يمكن عند $x=10,\ 20-10=10$

⇐ العددان هما 10 و 10

مثال ②: يراد صنع صندوق مفتوح من أعلى باستعمال قطعة من الكرتون مستطيلة عرضها 8cm وطولها 15cm بقطع مربعات متساوية من رؤوسها ثم ثني الأجزاء البارزة لأعلى أوجد حجم أكبر صندوق يمكن صنعه



$V=lwh$

$V=(15-2x)(8-2x)(x)$

$V=(15-2x)(8x-2x^2)$

$V=120x-30x^2-16x^2+4x^3$

$V=4x^3-46x^2+120x$

$V'=12x^2-92x+120$

$V'=0$

$12x^2-92x+120=0$

$(x-6)(3x-5)=0$

$x=6 \quad , \quad x=\frac{5}{3}$

$V''(x)=24x-92$

$V''(6)=52>0 \Rightarrow$ قيمة صغرى "مرفوض"

$V''(\frac{5}{3})=-52<0 \Rightarrow$ قيمة عظمى

∴ حجم أكبر صندوق يكون عندما $x=\frac{5}{3}$ ويساوي

$V=(15-2\cdot\frac{5}{3})(8\cdot\frac{5}{3}-2\cdot\frac{25}{9})=\frac{245}{27}cm^3$

تابع

مثال٣: يراد صنع علبة معدنية على شكل اسطوانة دائرية حجمها $1000\pi\, cm^3$ ، أوجد أبعاد الاسطوانة لكي تكون كمية المعدن أقل ما يمكن:

a) إذا كانت العلبة بدون غطاء

b) إذا استعملت العلبة لحفظ اللحوم

الحل

a)

$V = 1000\pi$

$\frac{\cancel{\pi} r^2 h}{r^2} = \frac{1000\cancel{\pi}}{r^2}$

$h = \frac{1000}{r^2}$

$A = 2\pi r h + \pi r^2$

$A = 2\pi \cancel{r}\left(\frac{1000}{r^{\cancel{2}}}\right) + \pi r^2$

$A = 2000\pi r^{-1} + \pi r^2$

$A' = -2000\pi r^{-2} + 2\pi r$

$A' = 0$

$\frac{-2000\pi}{r^2} + 2\pi r = 0$

$2\cancel{\pi} r = \frac{2000\cancel{\pi}}{r^2}$

$r^3 = \frac{2000}{2} = 1000$

$r = \sqrt[3]{1000} = 10\, cm$

$h = \frac{1000}{(10)^2} = 10\, cm$

	10	
إشارة $A'(r)$	−	+
اطراد دالة $A(r)$	↘ ق.ص.م ↗	

∴ تكون أصغر قيمة للاسطوانة عند $r = h = 10cm$ وتكون الكمية المستعملة:

$A = 2\pi r h + \pi r^2$

$= 2\pi(10)(10) + \pi(10)^2$

$= 200\pi + 100\pi$

$= 300\pi \; cm^2$

b) لحفظ الأطعمة ← أي مع غطاء

$A = 2\pi r h + 2\pi r^2$

$h = \frac{1000}{r^2}$

$A = 2\pi \cancel{r}\left(\frac{1000}{r^{\cancel{2}}}\right) + 2\pi r^2$

$A = 2000\pi r^{-1} + 2\pi r^2$

$A' = -2000\pi r^{-2} + 4\pi r$

$A' = 0$

$\frac{-2000\pi}{r^2} + 4\pi r = 0$

$4\cancel{\pi} r = \frac{2000\cancel{\pi}}{r^2}$

$r^3 = \frac{2000}{4} = 500$

$r = \sqrt[3]{500} \simeq 7,94\; cm$

$h = \frac{1000}{(\sqrt[3]{500})^2} = 15,87\; cm$

تابع

/ /

تمارين الكتاب ص 94

① العدد الموجب الذي مجموعه مع مقلوبه يكون أصغر ما يمكن

$f(x) = x + \frac{1}{x}$

$f(x) = x + x^{-1}$

$f'(x) = 1 - x^{-2}$

$f'(x) = 0$

$1 - \frac{1}{x^2} = 0$

$1 = \frac{1}{x^2}$

$x^2 = 1$

$x = \pm 1$

$f''(x) = 2x^{-3} = \frac{2}{x^3}$

$f''(-1) = \frac{2}{(-1)^3} = -2 < 0 \Rightarrow$ قيمة عظمى (مرفوض)

$f''(1) = \frac{2}{(1)} = 2 > 0 \Rightarrow$ قيمة صغرى

∴ العددان هما $x = 1$ و $x = \frac{1}{1} = 1$

ويكون ناتج مجموعهما هو 2

② عددان موجبان مجموعهما 100 ومجموع مربعيهما أصغر ما يمكن ما هما؟

$x + y = 100$

$y = 100 - x$

$f(x) = x^2 + (100 - x)^2$

$f(x) = x^2 + 10^4 - 200x + x^2$

$f(x) = 2x^2 - 200x + 10^4$

$f'(x) = 4x - 200$

$f'(x) = 0$

$4x - 200 = 0$

$4x = 200$

$x = 50$

$f''(x) = 4$

$f''(50) = 4 > 0 \Rightarrow$ قيمة صغرى

∴ العددان هما $x = 50$

$y = 100 - 50 = 50$

		7,94	
إشارة $A'(r)$	$-$		$+$
اطراد الدالة $A(r)$	↘	ن.ص.م	↗

∴ تكون اصغر ابعاد يمكن استخدامها هي

$r = 7,94\ cm$

$h = 15,87\ cm$

وتكون كمية المعدن المستخدمة

$A = 2\pi r h + 2\pi r^2$

$A = 2\pi(7,94)(15,87) + 2\pi(7,94)^2$

$A = 1187,8\ cm^2$

مثال 4: $S(t) = t^3 - 9t^2 + 24t$، أوجد أقل سرعة لهذا الجسم

$V(t) = S'(t)$

$V(t) = 3t^2 - 18t + 24$

$V'(t) = 6t - 18$

$V'(t) = 0$

$6t - 18 = 0$

$t = 3s$

$V''(t) = 6$

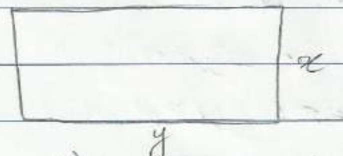
$V''(3) = 6 > 0 \Rightarrow$ قيمة صغرى

∴ سرعة الجسم تكون أقل ما يمكن عند $t = 3s$ وتساوي $V = 3(3)^2 - 18(3) + 24 = -3\ m/s$

و

③ شكل مستطيل من السلك طوله 20 cm احسب بعديه بحيث تكون مساحة سطح أكبر ما يمكن

المحيط = 20



$2(x+y)=20$

$x+y=10$

$y=10-x$

$A=x(10-x)$

$A=10x-x^2$

$A'=10-2x$

$A'=0$

$10-2x=0$

$10=2x$

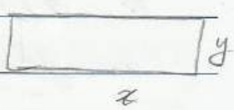
$x=5$

$A''(x)=-2<0 \Rightarrow$ قيمة عظمى

∴ تكون ابعاد المستطيل هي $x=5$ و $y=10-5=5$ لكي تكون مساحة سطحه أكبر ما يمكن

④ مستطيل مساحته $900cm^2$ احسب بعديه بحيث يكون محيطه اصغر ما يمكن

$A=900$



$xy=900$

$x=\frac{900}{y}$

$C=2x+2y$

$C=2\left(\frac{900}{y}\right)+2y$

$C=1800y^{-1}+2y$

$C'(y)=-1800y^{-2}+2$

$C'(y)=0$

$\frac{-1800}{y^2}+2=0$

$\frac{1800}{y^2}=2$

$y^2=\frac{1800}{2}$

$y=\sqrt{900}=30m$ ∴

$C''(y)=\frac{3600}{y^3}$

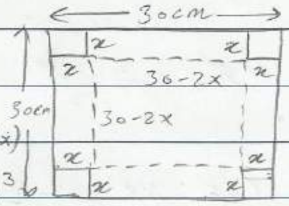
$C''(30)=\frac{3600}{(30)^3}=\frac{2}{15}>0$

∴ هناك قيمة صغرى عند $y=30$

∴ ابعاد المستطيل هي

$y=30m$, $x=\frac{900}{30}=30m$

⑤ قطعة من الورق على شكل مربع طول ضلعه 30cm قطع من أركانها الاربع مربعات متساوية ثم ثنيت اضلاعها لتكون صندوقاً مفتوحاً بيّن أن حجم الصندوق أكبر ما يمكن عندما يكون عمقه 5m



$V=LWh$

$V=(30-2x)^2(x)$

$V=(900-120x+4x^2)(x)$

$V=900x-120x^2+4x^3$

$V=4x^3-120x^2+900x$

$V'=12x^2-240x+900$

$V'=0$

$12x^2-240x+900=0$

$(x-15)(x-5)=0$

$x=15 \mid x=5$

$V''=24x-240$

$V''(15)=120>0 \Rightarrow$ قيمة صغرى "مرفوض"

$V''(5)=-120<0 \Rightarrow$ قيمة عظمى

∴ يكون حجم الصندوق أكبر ما يمكن عندما

الطول = العرض = $30-2(5)=20cm$

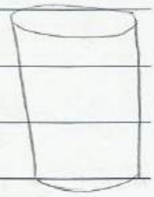
والعمق = $5cm$

ويكون الحجم عندها $V=(30-10)^2(5)=2000cm^3$

/ /

⑥ يراد صنع وعاء على شكل اسطوانة دائرية قائمة بغطاء، حجمها $(250\pi\, cm^3)$ أوجد أبعاد الوعاء التي تجعل المساحة السطحية أقل ما يمكن

$V = 250\pi$



$\cancel{\pi} r^2 h = 250\cancel{\pi}$

$h = \dfrac{250}{r^2}$

$A = 2\pi r h + 2\pi r^2$

$A = 2\pi \cancel{r}\left(\dfrac{250}{r^{\cancel{2}}}\right) + 2\pi r^2$

$A = 500\pi r^{-1} + 2\pi r^2$

$A' = -500\pi r^{-2} + 4\pi r$

$A' = 0$

$\dfrac{-500\pi}{r^2} + 4\pi r = 0$

$4\cancel{\pi} r = \dfrac{500\cancel{\pi}}{r^2}$

$r^3 = \dfrac{500}{4}$

$r = 125\ cm$

$A''(r) = \dfrac{1000\pi}{r^3}\ ,\ 4\pi$

$A''(125) = \dfrac{1000\pi}{(125)^3} + 4\pi \approx 12{,}6 > 0 \Rightarrow$ قيمة صغرى

∴ تكون الأبعاد المناسبة لصنع وعاء بأقل مساحة سطحية هي

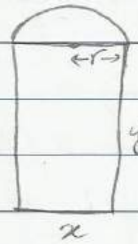
$r = 125 cm$

$h = \dfrac{250}{(125)^2} = 0{,}4\ cm$

⑦ نافذة على شكل مستطيل يعلوه نصف دائرة، إذا كان محيط النافذة $9m$ فأوجد الأبعاد التي تسمح بدخول أكبر كمية من الضوء

المحيط $= 9$

$r = \dfrac{x}{2}$



$2y + x + \frac{1}{2}(2\pi r) = 9$

$(2)2y + (2)x + (\cancel{2})\dfrac{\pi x}{\cancel{2}} = 9(2)$

$4y + 2x + \pi x = 18$

$y = \dfrac{18 - 2x - \pi x}{4}$

$A = yx + \frac{1}{2}(\pi r^2)$

$A = x \cdot \dfrac{18 - 2x - \pi x}{4} + \dfrac{1}{2}(\pi)\left(\dfrac{x^2}{4}\right)$

$A = \frac{1}{4}(18x - 2x^2 - \pi x^2) + \dfrac{\pi}{8}x^2$

$A' = \frac{1}{4}(18 - 4x - 2\pi x) + \dfrac{\pi}{4}x$

$A' = \frac{1}{4}(18 - 4x - 2\pi x + \pi x)$

$A' = \frac{1}{4}(18 - 4x - \pi x)$

$A' = 0$

$(\cancel{4})\frac{1}{\cancel{4}}(18 - 4x - \pi x) = 0(4)$

$18 - 4x - \pi x = 0$

$18 = 4x + \pi x$

$18 = x(4 + \pi)$

$x = \dfrac{18}{4 + \pi}$

$A'' = \frac{1}{4}(-4 - \pi)$

$A''\left(\frac{18}{4+\pi}\right) = \frac{1}{4}(-4 - \pi) < 0 \Rightarrow$ قيمة عظمى

∴ تدخل أكبر كمية ضوء عندما

$x = \dfrac{18}{4 + \pi} = 2{,}5\ m$

$y = \dfrac{18 - 2\left(\frac{18}{4+\pi}\right) - \pi\left(\frac{18}{4+\pi}\right)}{4} = 1{,}26 m$

$r = \dfrac{\frac{18}{4+\pi}}{2} = \dfrac{18}{8 + 2\pi} = 1{,}26 m$

/ /

(8) عددان موجبان حاصل ضربهما 16 ما العددان إذا كان:

a) مجموعهما أقل ما يمكن

b) مجموع الأول ومربع الآخر أقل ما يمكن

الحل

a) $xy = 16$

$x = \frac{16}{y}$

$f = x + y$

$f(y) = \frac{16}{y} + y$

$f(y) = 16y^{-1} + y$

$f'(y) = -16y^{-2} + 1$

$f'(y) = 0$

$-16y^{-2} + 1 = 0$

$\frac{16}{y^2} = 1$

$y^2 = 16$

$y = \sqrt{16}$

$y = 4$

$f''(y) = 32y^{-3}$

$f''(4) = \frac{32}{(4)^3} = \frac{1}{2} > 0 \Rightarrow$ صغرى

∴ العددان هما $y = 4$, $x = \frac{16}{4} = 4$

b) $f = x + y^2$

$f(y) = \frac{16}{y} + y^2$

$f(y) = 16y^{-1} + y^2$

$f'(y) = -16y^{-2} + 2y$

$f'(y) = 0$

$-16y^{-2} + 2y = 0$

$\frac{16}{y^2} = 2y$

$y^3 = 8$

تابع

$y = \sqrt[3]{8} = 2$

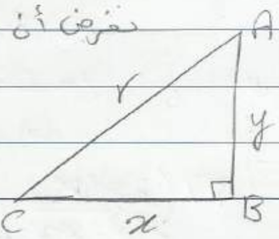
$f''(y) = 32y^{-3} + 2$

$f''(2) = \frac{32}{(2)^3} + 2 = 6 > 0 \Rightarrow$ صغرى

∴ العددان هما $x = \frac{16}{2} = 8$ و $y = 2$

(9) المثلث ABC قائم في B إذا كان $AB + 2BC = 32cm$ فأوجد أكبر مساحة للمثلث

نفرض أن $CB = x$, $AB = y$, $AC = r$



$\therefore y + 2x = 32$

$y = 32 - 2x$

$A = \frac{1}{2}xy$

$A = \frac{1}{2}x(32 - 2x)$

$A = 16x - x^2$

$A' = 16 - 2x$

$A'(x) = 0$

$16 - 2x = 0$

$2x = 16$

$x = 8$

$A'' = -2$

$A''(8) = -2 < 0 \Rightarrow$ عظمى

∴ تكون للمثلث مساحة عظمى عندما $x = 8$, $y = 16$ وتكون المساحة

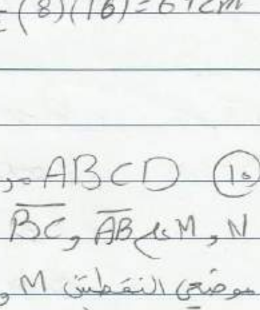
$A = \frac{1}{2}(8)(16) = 64cm^2$

(10) ABCD مربع طول ضلعه 10cm أخذت النقطتان N , M على $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ بحيث كان $NB = BM$ فأوجد موضعي النقطتين M و N بحيث تكون مساحة الشكل DNMC أكبر ما يمكن

نفرض أن $NB = x$

أي أن $BM = NB = x$

و $AN = MC = 10 - x$



مساحة المثلث ① $= \frac{1}{2}x^2$

مساحة المثلث ② $= \frac{1}{2}(10)(10 - x) = 50 - 5x$

$A = 100 - (\frac{1}{2}x^2 + 50 - 5x)$

$A' = -(x - 5) = -x + 5 = 5 - x$

$A' = 0$

تابع

$5 - x = 0$

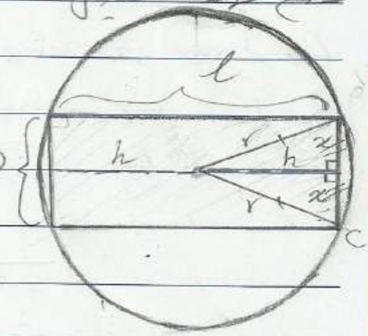
$x = 5$

$A''(x) = -1$

$A''(5) = -1 < 0 \Rightarrow$ قيمة عظمى

∴ تكون كل من النقطة N و M في منتصف القطعتين $\overline{AB}$, $\overline{BC}$

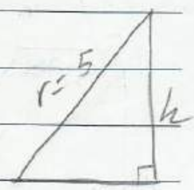
(11) دائرة طول نصف قطرها 5cm، رسم داخلها المستطيل ABCD بحيث تقع رؤوسه على الدائرة أوجد أكبر مساحة ممكنة للمستطيل



$A = lw$

$= (2h)(2x)$

$= 4xh$



$\Rightarrow h = \sqrt{25 - x^2}$

$A = 4x\sqrt{25 - x^2}$

$A' = 4x\left(\dfrac{-\cancel{2}x}{\cancel{2}\sqrt{25 - x^2}}\right) + 4\sqrt{25 - x^2}$

$A' = \dfrac{-4x^2}{\sqrt{25 - x^2}} + 4\sqrt{25 - x^2}$

$A' = 0$

$\dfrac{-4x^2}{\sqrt{25 - x^2}} + 4\sqrt{25 - x^2} = 0$

تابع

$\dfrac{4x^2}{\sqrt{25 - x^2}} = \dfrac{4\sqrt{25 - x^2}}{1}$

$\cancel{4}x^2 = \cancel{4}(25 - x^2)$

$x^2 = 25 - x^2$

$2x^2 = 25$

$x^2 = \dfrac{25}{2}$

$x = \sqrt{\dfrac{25}{2}} = \dfrac{5\sqrt{2}}{2} \simeq 3{,}5\,cm$

$A'' = \dfrac{-8x\sqrt{25 - x^2} + 4x^2\left(\dfrac{-\cancel{2}x}{\cancel{2}\sqrt{25 - x^2}}\right)}{25 - x^2} + 4\left(\dfrac{-\cancel{2}x}{\cancel{2}\sqrt{25 - x^2}}\right)$

$A'' = \dfrac{-8x\sqrt{25 - x^2} - \left(\dfrac{4x^3}{\sqrt{25 - x^2}}\right)}{25 - x^2} - \dfrac{4x}{\sqrt{25 - x^2}}$

$A''\left(\dfrac{5\sqrt{2}}{2}\right) = -16 < 0 \Rightarrow$ قيمة عظمى

∴ تكون أكبر مساحة للمستطيل عندما

$h = \sqrt{25 - \left(\dfrac{5\sqrt{2}}{2}\right)^2} = \dfrac{5\sqrt{2}}{2}\,cm$, $x = \dfrac{5\sqrt{2}}{2}\,cm$

وعليه تكون مساحة المستطيل هي

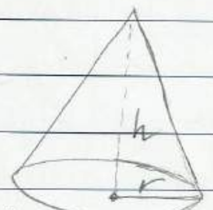
$A = 4xh$

$= 4\left(\dfrac{5\sqrt{2}}{2}\right)^2 = 50\,cm^2$

(12) مخروط مجموع طول محيط قاعدته وارتفاعه يساوي 44cm، أوجد نصف قطر قاعدته عندما يكون حجمه أكبر ما يمكن.

$2\pi r + h = 44$

$h = 44 - 2\pi r$



$V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$

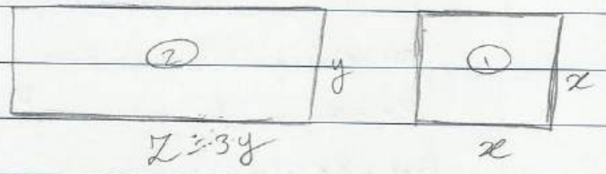
$V = \frac{1}{3}\pi r^2(44 - 2\pi r)$

$V = \frac{44}{3}\pi r^2 - \frac{2}{3}(\pi)^2 r^3$

تابع

/ /

(14) سلك طوله 56cm قطع لقطعتين وعمل مربع من إحداهما وعمل من القطعة الأخرى مستطيل النسبة بين بعديه 3:1 احسب طول قطعتي السلك لتكون مساحتا سطحي المربع والمستطيل أصغر ما يمكن



$56 = 4x + 2y + 2Z$

$56 = 4x + 2y + 6y$

$\frac{56}{4} = \frac{4x}{4} + \frac{8y}{4}$

$2y + x = 14$

$x = 14 - 2y$

$A_t = A_1 + A_2$

$A_t = x^2 + 3y(y)$

$A_t = x^2 + 3y^2$

$A_t = (14-2y)^2 + 3y^2$

$A_t = 196 - 56y + 4y^2 + 3y^2$

$A_t = 7y^2 - 56y + 196$

$A'_t = 14y - 56$

$A'_t = 0$

$14y - 56 = 0$

$14y = 56$

$y = 4$

$A''_t = 14$

$A''_t(4) = 14 > 0 \Rightarrow$ قيمة صغرى

∴ تكون الأبعاد هي $y = 4,\ x = 14 - 8 = 6,\ Z = 12$

وتكون طول قطع السلك المربع $= 4x = 4(6) = 24m$

وتكون طول قطع السلك المستطيل $= 2Z + 2y = 2(12) + 2(4) = 32m$

$V' = \frac{88}{3}\pi r - 2(\pi)^2 r^2$

$V' = 0$

$\frac{88}{3}\pi r - 2(\pi)^2 r^2 = 0$

$\frac{88\pi r}{3} = 2(\pi)^2 r^2$

$88\pi r = 6(\pi)^2 r^2$

$88 = 6\pi r$

$r = \frac{88}{6\pi} = \frac{44}{3\pi}$

$V'' = \frac{88}{3}\pi - 4(\pi)^2 r$

$V''\left(\frac{44}{3\pi}\right) = -\frac{88}{3}\pi < 0 \Rightarrow$ قيمة عظمى

∴ يكون نصف القطر يساوي $\frac{44}{3\pi} \approx 4.7cm$

(13) $S(t) = t^3 - 9t^2 + 35t - 28$

أوجد السرعة والعجلة عند أي لحظة t، ثم أوجد متى تكون سرعة الجسم أقل ما يمكن وقيمة هذه السرعة

$V = S'$

$V(t) = 3t^2 - 18t + 35$

$a(t) = V'(t)$

$a(t) = 6t - 18$

لإيجاد النقاط الحرجة للسرعة $a(t) = 0$

$6t - 18 = 0$

$6t = 18$

$t = 3\,s$

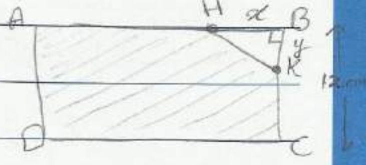
$a'(t) = 6 > 0 \Rightarrow$ قيمة صغرى

∴ تكون قيمة السرعة أصغر ما يمكن عند $t = 3s$ وتساوي

$V(3) = 3(3)^2 - 18(3) + 35 = 8\,cm/s$

(15) ABCD مستطيل فيه $AB = 8cm$, $BC = 12$
واخذت النقطتان H, K على $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ على الترتيب
بحيث كانت $BH + BK = 10cm$. أوجد طول كل
من $\overline{BH}$, $\overline{BK}$ الذي يجعل مساحة سطح
AKHCD أصغر ما يمكن

نفرض أن $BH = x$
و $BK = y$



$\therefore BH + BK = 10$

$\therefore x + y = 10$

$y = 10 - x$

$A = (AB)(BC) - \left[\frac{1}{2}xy\right]$

$A = (8)(12) - \frac{1}{2}(x)(10-x)$

$A = 96 - 5x + \frac{1}{2}x^2$

$A' = -5 + x = x - 5$

$A' = 0$

$x - 5 = 0$

$x = 5$

$A''(x) = 1$

$A''(5) = 1 > 0 \Rightarrow$ قيمة صغرى

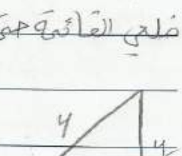
$\therefore$ طول $\overline{BH} = x = 5cm$

وطول $\overline{BK} = y = 10 - x = 10 - 5 = 5\ cm$

(16) مثلث قائم الزاوية وتره 4cm ، عين طولي
ضلعي القائمة حتى تكون مساحة سطحه أكبر ما يمكن

$y = \sqrt{16 - x^2}$

$A = \frac{1}{2}x\sqrt{16-x^2}$



$A' = \frac{1}{2}x\left(\frac{-\cancel{2}x}{\cancel{2}\sqrt{16-x^2}}\right) + \frac{1}{2}\sqrt{16-x^2}$

$A' = \frac{-x^2}{2\sqrt{16-x^2}} + \frac{1}{2\sqrt{16-x^2}}$

تابع

$A' = \frac{-x^2+1}{2\sqrt{16-x^2}}$

$A' = 0$

$\frac{-x^2+1}{2\sqrt{16-x^2}} = \frac{0}{1}$

$-x^2 + 1 = 0$

$x^2 = 1$

$x = 1$

$A'' = \frac{-2x(2\sqrt{16-x^2}) - (-x^2+1)\left[\cancel{2}\cdot\frac{-2x}{\cancel{2}\sqrt{16-x^2}}\right]}{4(16-x^2)}$

$A'' = \frac{-4x\sqrt{16-x^2} + (x^2-1)\left(\frac{-2x}{\sqrt{16-x^2}}\right)}{64-4x^2}$

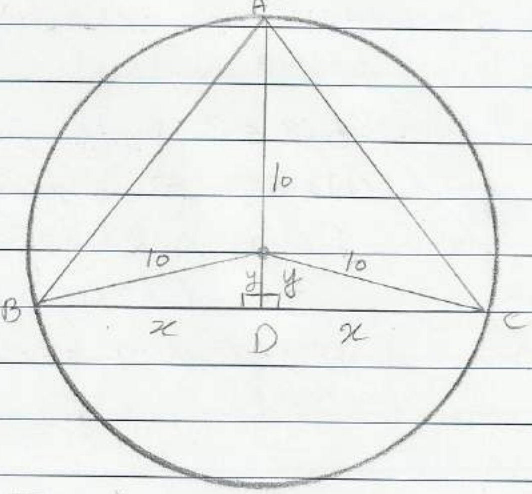
$A'' = \frac{-4x\sqrt{16-x^2} - \left(\frac{2x^3-2x}{\sqrt{16-x^2}}\right)}{64-4x^2}$

$A''(1) = \frac{-\sqrt{15}}{15} < 0 \Rightarrow$ قيمة عظمى

$\therefore$ يكون طول ضلعي القائمة هما 1cm

$y = \sqrt{16-(1)^2} = \sqrt{15} \simeq 3{,}9cm$

(17) $\triangle ABC$ متطابق الضلعين مرسوم داخل دائرة طول
نصف قطرها 10cm ، أنزل $\overline{AD}$ عمودياً على $\overline{BC}$
أوجد طول $\overline{AD}$ لتصبح مساحة سطح المثلث أكبر ما يمكن



تابع

$/\quad/$

$y = \sqrt{100 - x^2}$

$\overline{AD} = h = 10 + y = 10 + \sqrt{100 - x^2}$

$\overline{BC} = b = 2x$

$A = \frac{1}{2} bh$

$= \frac{1}{\cancel{2}}(\cancel{2}x)(10 + \sqrt{100 - x^2})$

$= 10x + x\sqrt{100 - x^2}$

$A' = 10 + x\left(\frac{-\cancel{2}x}{\cancel{2}\sqrt{100 - x^2}}\right) + \sqrt{100 - x^2}$

$A' = 10 - \frac{x^2}{\sqrt{100 - x^2}} + \sqrt{100 - x^2}$

$A' = \frac{10\sqrt{100 - x^2} - x^2}{\sqrt{100 - x^2}} + \sqrt{100 - x^2}$

$A' = 0$

$\frac{10\sqrt{100 - x^2} - x^2}{\sqrt{100 - x^2}} + \sqrt{100 - x^2} = 0$

$\frac{10\sqrt{100 - x^2} - x^2}{\sqrt{100 - x^2}} = \frac{-\sqrt{100 - x^2}}{1}$

$10\sqrt{100 - x^2} - x^2 = -(100 - x^2)$

$10\sqrt{100 - x^2} - x^2 = -100 + x^2$

$\frac{10}{2}\sqrt{100 - x^2} = \frac{-100}{2} + \frac{2}{2}x^2$

$(5\sqrt{100 - x^2})^2 = (-50 + x^2)^2$

$25(100 - x^2) = 2500 - 100x^2 + x^4$

$\cancel{2500} - 25x^2 = \cancel{2500} - 100x^2 + x^4$

$-25x^2 = -100x^2 + x^4$

$x^4 - 75x^2 = 0$

$u = x^2$

$u^2 - 75u = 0$

$(u - 75)(u + 0) = 0$

$u = 75$	$u = 0$ مرفوض
$x^2 = 75$	
$x = \sqrt{75}$	
$= 5\sqrt{3}$	

$A'' = \frac{-2x\sqrt{100 - x^2} + x^2\left(\frac{-\cancel{2}x}{\cancel{2}\sqrt{100 - x^2}}\right)}{100 - x^2} + \frac{-\cancel{2}x}{\cancel{2}\sqrt{100 - x^2}}$

$A'' = \frac{-2x\sqrt{100 - x^2} - \left(\frac{x^3}{\sqrt{100 - x^2}}\right)}{100 - x^2} - \frac{x}{\sqrt{100 - x^2}}$

$A''(5\sqrt{3}) = -8,66 - \sqrt{3}$

$\simeq -10,4 < 0 \Rightarrow$ قيمة عظمى

$\therefore \overline{AD} = 10 + \sqrt{100 - (5\sqrt{3})^2} = 15\,cm$

(18) نافذة على شكل مستطيل مجموع طولي بعديه 6m ، يعلوه مثلث قائم الزاوية متطابق الضلعين ، وتره أحد بعدي المستطيل. أوجد بعدي المستطيل اللذان يسمحان بدخول أكبر كمية ضوء

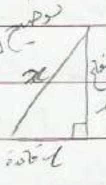
$x + y = 6$

$y = 6 - x$

"طول الضلع" $l = \frac{x}{\sqrt{2}}$ "طول القطر" $\Leftarrow$ مثلث 90, 45, 45

$A = xy + \frac{1}{2} l\, l$

توضيح



$A = x(6 - x) + \frac{1}{2}\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right)^2$

$A = 6x - x^2 + \frac{1}{2} \cdot \frac{x^2}{2}$

$A = 6x - x^2 + \frac{1}{4}x^2$

$A = \frac{-3}{4}x^2 + 6x$

$A' = \frac{-3}{2}x + 6$

$A' = 0$

$\frac{-3}{2}x + 6 = 0$

$\frac{\cancel{2}}{\cancel{3}} \times \frac{\cancel{3}}{\cancel{2}} x = 6 \times \frac{2}{3}$

$x = 4$

$A'' = \frac{-3}{2}$

$A''(4) = \frac{-3}{2} < 0 \Rightarrow$ قيمة عظمى

$\therefore$ بعدا المستطيل هما $x = 4m$, $y = 6 - 4 = 2m$

حل اختبار الفصل الثاني ص96

أوجد ميل المماس لمنحنى كل دالة مما يأتي عند النقطة المعطاة

(1) $f(x) = x^3 - 3x^2 + 7 \quad (2,3)$

$f'(x) = 3x^2 - 6x$

$m = f'(2) = 3(2)^2 - 6(2) = 0$

(2) $f(x) = |x| \ , x=1 \ , x=0$

$$f(x) = \begin{cases} x , & x \geq 0 \\ -x , & x < 0 \end{cases}$$

عند $x=0$

$f(x) = x$

$f'(x) = 1$

$m = f'(0) = 1$

عند $x=1$

$f(x) = x$

$f'(x) = 1$

$m = f'(1) = 1$

(3) $f(x) = \sqrt{3x-2} \quad (2,2)$

$f'(x) = \dfrac{3}{2\sqrt{3x-2}}$

$m = f'(2) = \dfrac{3}{2\sqrt{6-2}} = \dfrac{3}{4}$

(4) $f(x) = \dfrac{1+x}{1-x} \quad (-1,0)$

$f'(x) = \dfrac{(1-x) - (1+x)(-1)}{(1-x)^2}$

$f'(x) = \dfrac{1 - \cancel{x} + 1 + \cancel{x}}{(1-x)^2} = \dfrac{2}{(1-x)^2}$

$m = f'(-1) = \dfrac{2}{(1+1)^2} = \dfrac{1}{2}$

(5) $y^2 + 2xy - 3x^2 = 0 \quad (1,-3)$

$\dfrac{2yy'}{2} + \dfrac{2xy'}{2} + \dfrac{2y}{2} - \dfrac{6x}{2} = \dfrac{0}{2}$

$yy' + xy' + y - 3x = 0$

$yy' + xy' = -y + 3x$

$y'(y+x) = -y + 3x$

$y' = \dfrac{-y+3x}{y+x}$

$m = \left(\dfrac{dy}{dx}\right)_{(1,-3)} = \dfrac{3+3}{-3+1} = \dfrac{6}{-2} = -3$

(6) $x^2 + y^2 + 2x - 8y + 12 = 0 \quad (1,5)$

$\dfrac{2x}{2} + \dfrac{2yy'}{2} + \dfrac{2}{2} - \dfrac{8y'}{2} = \dfrac{0}{2}$

$x + yy' + 1 - 4y' = 0$

$yy' - 4y' = -x - 1$

$y'(y-4) = -x - 1$

$y' = \dfrac{-x-1}{y-4}$

$m = \left(\dfrac{dy}{dx}\right)_{(1,5)} = \dfrac{-1-1}{5-4} = -2$

(7) أوجد النقاط الواقعة على $y = \sqrt{x^2-4}$ والتي يكون عندها المماس رأسياً

$\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{\cancel{2}x}{\cancel{2}\sqrt{x^2-4}} = \dfrac{x}{\sqrt{x^2-4}}$

∵ المماس رأسي

∴ الميل غير معرف

∴ مقام المشتقة = صفر

$\sqrt{x^2-4} = 0$

$x^2 - 4 = 0$

$x^2 = 4$

$x = \pm 2$

$f(2) = 0 \quad (2,0)$

$f(-2) = 0 \quad (-2,0)$

∴ النقاط هي $(\pm 2, 0)$

/ /

(8) النقاط الواقعة على $y = x^3 - 7x$, التي يصنع المماس عندها زاوية قياسها $\frac{3\pi}{4}$ مع الاتجاه الموجب لمحور x

$\frac{dy}{dx} = 3x^2 - 7$

$\frac{dy}{dx} = \tan\theta$

$3x^2 - 7 = \tan\frac{3\pi}{4}$

$3x^2 - 7 = -1$

$3x^2 = 6$

$x^2 = 2$

$x = \pm\sqrt{2}$

$f(\sqrt{2}) = -5\sqrt{2} \Rightarrow (\sqrt{2}, -5\sqrt{2})$

$f(-\sqrt{2}) = 5\sqrt{2} \Rightarrow (-\sqrt{2}, 5\sqrt{2})$

∴ النقاط هي $(\sqrt{2}, -5\sqrt{2}), (-\sqrt{2}, 5\sqrt{2})$

(9) أوجد معادلة المماس لـ $y = \frac{9x}{1-x^2}$ عند $(2, -6)$

$y' = \frac{(1-x^2)(9) - (9x)(-2x)}{(1-x^2)^2}$

$y' = \frac{9 - 9x^2 + 18x^2}{(1-x^2)^2} = \frac{9x^2 + 9}{(1-x^2)^2}$

$m = \left(\frac{dy}{dx}\right)_{(2,-6)} = \frac{9(4)+9}{(1-4)^2} = 5$

معادلة المماس $y - y_1 = m(x - x_1)$

$y + 6 = 5(x - 2)$

$y + 6 = 5x - 10$

$5x - y - 16 = 0$

(10) أثبت أن النقطة $(-1,3)$ تقع على منحنى $x^2 + y^2 - 4x + 2y = 20$ ثم أوجد معادلة المماس والعمودي للمنحنى عندها

$(-1)^2 + (3)^2 - 4(-1) + 2(3) \stackrel{?}{=} 20$

$1 + 9 + 4 + 6 \stackrel{\checkmark}{=} 20$

∴ النقطة تحقق معادلة المنحنى

$\frac{2x}{2} + \frac{2yy'}{2} - \frac{4}{2} + \frac{2y'}{2} = \frac{0}{2}$

$x + yy' - 2 + y' = 0$

$y'(y+1) = -x + 2$

$y' = \frac{-x+2}{y+1}$

$m = \left(\frac{dy}{dx}\right)_{(-1,3)}$

$m = \frac{1+2}{4} = \frac{3}{4}$

معادلة المماس:

$y - y_1 = m(x - x_1)$

$y - 3 = \frac{3}{4}(x+1)$

$4y - 12 = 3x + 3$

$3x - 4y + 15 = 0$

معادلة العمودي:

$y - y_1 = \frac{-1}{m}(x - x_1)$

$y - 3 = \frac{-4}{3}(x+1)$

$3y - 9 = -4x - 4$

$4x + 3y - 5 = 0$

(11) أوجد معادلة العمودي لـ $y + \sqrt{x} = 12$ عند نقطة تقاطعه مع المستقيم $y_1 = x$

$y_2 = 12 - \sqrt{x}$

$12 - \sqrt{x} = x$

$(12 - x)^2 = (\sqrt{x})^2$

$144 - 24x + x^2 = x$

$x^2 - 25x + 144 = 0$

$(x - 16)(x - 9) = 0$

$x = 16$, $x = 9$

بالتعويض في المعادلتين:

$y_2 = 12 - \sqrt{16} = 8$

$y_1 = 16$

$y_1 \neq y_2 \Rightarrow$ مرفوض

بالتعويض في المعادلتين:

$y_2 = 12 - \sqrt{9} = 9$

$y_1 = 9$

$y_1 = y_2 \Rightarrow \checkmark$

$f(9) = 9$

∴ النقطة هي $(9, 9)$

$y = 12 - \sqrt{x}$

$y' = \frac{-1}{2\sqrt{x}}$

$m = \left(\frac{dy}{dx}\right)_{(9,9)} = \frac{-1}{6}$

معادلة العمودي:

$y - y_1 = \frac{-1}{m}(x - x_1)$

$y - 9 = 6(x - 9)$

$y - 9 = 6x - 54$

$6x - y - 45 = 0$ ج

معادلة المماس: (زيادة)

$y - y_1 = m(x - x_1)$

$y - 9 = \frac{-1}{6}(x - 9)$

$6y - 54 = -x + 9$

$x + 6y - 63 = 0$

/ /

(12) $s=t^3-9t^2+15t$ ، s الإزاحة بالأمتار والزمن بالثواني، أوجد v و a عند أي لحظة

$v=s'=3t^2-18t+15$

$a=s''=6t-18$

(13) $s=\cos 2t+\sin 2t$ ، s(cm) ، t(s) أثبت أن $s''=-4s$ (عددياً)

$s'=-2\sin 2t+2\cos 2t$

$s''=-4\cos 2t-4\sin 2t$

$s''=-4(\cos 2t+\sin 2t)$

$s''=-4s$

الإثبات العددي

$s''\big|_{t=45}=-4\cos 90^\circ-4\sin 90^\circ=-4\,cm$

$s\big|_{t=45}=\cos 90+\sin 90=1\,cm$

$\therefore s''=-4s$

$\therefore s''=-4(1)=-4\,cm$

(14) $s=8\sin^2 t$ حيث $s(cm)$, $t(s)$

أوجد a بعد $\frac{\pi}{2}$ sec

$s=8(\sin t)^2$

$v=s'=16(\sin t)(\cos t)$

$v=8(2\sin t\cos t)=8\sin 2t$

$a=v'=8(2)\cos 2t$

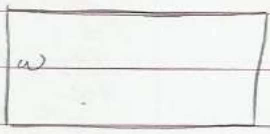
$a=16\cos 2t$

$a\big|_{t=\frac{\pi}{2}}=16\cos 2\left(\frac{\pi}{2}\right)=16\cos\pi=-1\,cm/s^2$

(15) صفيحة مستطيلة الشكل قياس طولها يساوي مثلي قياس عرضها تتمدد بالحرارة، أوجد التغير في قياس محيطها إذا كان معدل تغير قياس طولها يساوي $0,02\,cm/s$

$\frac{dc}{dt}=?$

$\frac{dl}{dt}=0,02$



$l=2w$

$c=2l+2w$

$c=2l+l=3l$

$\frac{dc}{dt}=3\frac{dl}{dt}$

$\frac{dc}{dt}=3(0,02)=0,06\,cm/s$

(16) أوجد إحداثيات النقاط التي تقع على المنحنى $x^2+y^2=8$ والتي يكون عندها معدل تغير الإحداثي y بالنسبة للزمن يساوي معدل تغير الإحداثي x بالنسبة للزمن

الحل

$\frac{dy}{dt}=\frac{dx}{dt}$

$\frac{2}{2}x\frac{dx}{dt}+\frac{2}{2}y\frac{dy}{dt}=\frac{0}{2}$

$x\frac{dx}{dt}+y\frac{dy}{dt}=0$

$x\frac{dy}{dt}+y\frac{dy}{dt}=0$

$\frac{dy}{dt}(x+y)=0$

$\frac{dy}{dt}\neq 0$ | $x+y=0$, $x=-y$

بالتعويض في المعادلة

$(-y)^2+y^2=8$

$2y^2=8$

$y^2=4$

$y=\pm 2$

$x^2+(-2)^2=8$

$x^2+4=8$

$x^2=4$

$x=\pm 2$

$(-2,-2)(2,-2)$ ∴

$x^2+(2)^2=8$

$x^2=4$

$x=\pm 2$

$(-2,2)(2,2)$ ∴

∴ النقاط

$(\pm 2,2),(\pm 2,-2)$

/ /

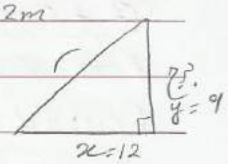
(17) يتحرك رجل نحو قاعدة برج بمعدل $1 m/s$، إذا كان ارتفاع البرج $9m$ فأوجد معدل اقتراب الرجل من قمة البرج عندما يكون على بعد $12m$ من قاعدته

$\frac{dx}{dt} = -1$

$y = 9$ (ثابت)

$\frac{dr}{dt} = ?$

$x = 12m$



$r = \sqrt{(9)^2 + (12)^2} = 15m$

$x^2 + (9)^2 = r^2$

$\cancel{2}x \frac{dx}{dt} = \cancel{2}r \frac{dr}{dt}$

$12(-1) = 15 \frac{dr}{dt}$

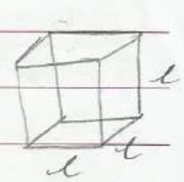
$\frac{dr}{dt} = \frac{-12}{15} = -0,8 m/s$

(18) مكعب يتمدد بالحرارة فيزداد طول حرفه بمعدل $0,08 cm/min$، أوجد معدل تغير المساحة الكلية له في اللحظة التي يكون فيها معدل تغير الحجم مساوياً لـ $0,96 cm^3/min$

$\frac{dl}{dt} = 0,08$

$\frac{dA}{dt} = ?$

$\frac{dV}{dt} = 0,96$



$V = l^3$

$\frac{dV}{dt} = 3l^2 \frac{dl}{dt}$

$0,96 = 3(0,08) l^2$

$l^2 = \frac{0,96}{0,24} = 4$

$l = 2 cm$

$A = 6l^2$

$\frac{dA}{dt} = 12 l \frac{dl}{dt} = 12(2)(0,08)$

$\frac{dA}{dt} = 1,92 cm^2/min$

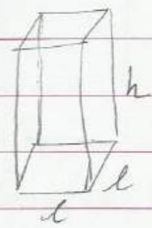
(19) جسم من المعدن على شكل متوازي مستطيلات قاعدته مربعة الشكل وارتفاعه يساوي مثلي طول ضلع قاعدته يتمدد بالحرارة، إذا كان طول ضلع القاعدة يزداد بمعدل $0,005 cm/min$ فأوجد معدل الزيادة في الحجم عند اللحظة التي يكون فيها طول ضلع القاعدة $10 cm$

$h = 2l$

$l = 10$

$\frac{dl}{dt} = 0,005$

$\frac{dV}{dt} = ?$



$V = l^2 h$

$V = 2l^3$

$\frac{dV}{dt} = 6l^2 \frac{dl}{dt}$

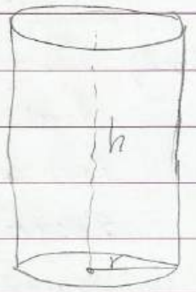
$\frac{dV}{dt} = 6(10)^2(0,005) = 3 cm^3/min$

(20) خزان للمياه على شكل اسطوانة دائرية قائمة طول نصف قطر قاعدته $7m$ وارتفاعه $10m$ ويصب فيه الماء على بمعدل $9 m^3/min$ وفي نفس اللحظة يخرج الماء من فتحة أسفل الخزان بمعدل $\frac{5}{3} m^3/min$ أوجد معدل ارتفاع الماء داخل الخزان عند أي لحظة، والزمن اللازم ليصبح حجم الماء داخل الخزان مساوياً لحجم الخزان

$r = 7 \quad h = 10$

$\frac{dV}{dt} = 9 - \frac{5}{3} = \frac{22}{3} m^3/min$

$\frac{dh}{dt} = ?$



الحل

$V = \pi (7)^2 h$

$V = 49\pi h$

$\frac{dV}{dt} = 49\pi \frac{dh}{dt}$

$\frac{dh}{dt} = \frac{\frac{dV}{dt}}{49\pi} = \frac{\frac{22}{3}}{49\pi} = \frac{22}{147\pi} \approx 0,0476 m/min$

الزمن اللازم لامتلاء الخزان $= \frac{V}{\frac{dV}{dt}} = \frac{\pi r^2 h}{\frac{22}{3}} = \frac{(7)^2(10)\pi}{\frac{22}{3}} = 209,9 min$

/ /

(21) إذا كان للاقتران $f(x)=x^3+ax^2+bx$ نقطتان حرجتان عند $x=-2$ و $x=-1$ فأوجد a و b

$f'(x)=3x^2+2ax+b$

$f'(-1)=0$ | $f'(-2)=0$

$0=3-2a+b$ | $12-4a+b=0$

$-2a+b=-3$ | $-4a+b=-12$

$$\begin{array}{r} -2a+\cancel{b}=-3 \\ \ominus\quad -4a+\cancel{b}=-12 \\ \hline 2a=9 \end{array}$$

$a=\frac{9}{2}=4,5$

$-\cancel{2}\left(\frac{9}{\cancel{2}}\right)+b=-3$

$-9+b=-3$

$b=6$

$\therefore f(x)=x^3+\frac{9}{2}x^2+6x$

(22) إذا كان للاقتران $y=x^2+bx+3$ قيمة صغرى محلية عند $(x,2)$ فأوجد قيمة b

$y=f(x)=x^2+bx+3$

$f'(x)=2x+b$

$f'(x)=0$

$2x+b=0$

$x=\frac{-b}{2}$

$(x,2)$ تحقق معادلة المنحنى

$2=x^2+bx+3$

$0=\left(\frac{-b}{2}\right)^2+b\left(\frac{-b}{2}\right)+1$

$(4)\left(\frac{b^2}{4}-\frac{b^2}{2}+1\right)=0(4)$

$b^2-2b^2+4=0$

$-b^2+4=0$

$b^2=4$

$b=\pm 2$

(23) إذا كانت $f(x)=2x^3+ax^2+c$ وكان للاقتران قيمة عظمى محلية تساوي 7 عند $x=-1$ فأوجد a و c

$(-1,7)$ تحقق معادلة المنحنى

$7=-2+a+c$

$a+c=9$

$f'(x)=6x^2+2ax$

$f'(-1)=0$

$6-2a=0$

$2a=6$

$a=3$

$3+c=9$

$c=6$

(24) إذا كانت $y=x^3+ax^2+bx+c$ فأوجد a و b و c إذا كانت للاقتران قيمة صغرى محلية عند $(-1,2)$ ويمر منحنى الاقتران بالنقطة $(0,4)$

$(0,4)$ تحقق معادلة المنحنى

$4=c$

$(-1,2)$ تحقق معادلة المنحنى

$2=-1+a-b+4$

$a-b=-1$

$y'=3x^2+2ax+b$

$f'(-1)=0$

$3-2a+b=0$

$-2a+b=-3$

$$\begin{array}{r} a-\cancel{b}=-1 \\ \oplus\quad -2a+\cancel{b}=-3 \\ \hline -a=-4 \end{array}$$

$a=4$

$4-b=-1$

$b=5$

$\therefore$ $a=4$, $b=5$, $c=4$

$f(x)=x^3+4x^2+5x+4$

/ /

(25) $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ نقطة انقلاب لمنحنى $y = ax^3 + bx^2 + 1$ أوجد كل من a و b

$f(x) = ax^3 + bx^2 + 1$

$(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ تحقق معادلة المنحنى

$\frac{1}{2} = \frac{1}{8}a + \frac{1}{4}b + 1$

$\frac{1}{2}(8) = (8)\frac{1}{8}a + (8)\frac{1}{4}b + 8(1)$

$4 = a + 2b + 8$

$a + 2b = -4 \longrightarrow ①$

$f'(x) = 3ax^2 + 2bx$

$f''(x) = 6ax + 2b$

$f''(\frac{1}{2}) = 0$

$6(\frac{1}{2})a + 2b = 0$

$3a + 2b = 0 \longrightarrow ②$

بطرح المعادلتين ① و ②

$3a + \cancel{2b} = 0$

$\ominus \quad a + \cancel{2b} = -4$

$2a = 4$

$a = 2$

$3(2) + 2b = 0$

$2b = -6$

$b = -3$

$\therefore a = 2$ و $b = -3$

$f(x) = 2x^3 - 3x^2 + 1$

(26) أوجد كل من a و b لمنحنى $f(x) = x^3 + ax^2 + bx$ نقطة حرجة عند $x = -1$ ، نقطة انقلاب عند $x = 2$ ، وجد

$f'(x) = 3x^2 + 2ax + b$

$f'(-1) = 0$

$3 - 2a + b = 0$

$-2a + b = -3$

تابع

$f''(x) = 6x + 2a$

$f''(2) = 0$

$12 + 2a = 0$

$2a = -12$

$a = -6$

$-2(-6) + b = -3$

$12 + b = -3$

$b = -15$

$\therefore a = -6$ ، $b = -15$ ، $f(x) = x^3 - 6x^2 - 15x$

جد فترات التزايد والتناقص والنقاط العظمى والصغرى وأوجد نوع وفترات التقعر ثم مثل الدالة بصورة تقريبية

(27) $y = x^3 - 6x^2 + 9x - 7$

$y' = 3x^2 - 12x + 9$

$y' = 0$

$3x^2 - 12x + 9 = 0$

$(x-3)(x-1) = 0$

$x = 3$ or $x = 1$

$f(3) = -7$ | $f(1) = -3$

$\therefore$ النقطتان الحرجتان هما $(1,-3)$ و $(3,-7)$

1 3

$f'(x)$	+	−	+
اطراد الدالة $f(x)$	تزايد ↗	تناقص ↘	تزايد ↗

الدالة متزايدة على $(-\infty, 1] \cup [3, \infty)$ ن.ع.م ن.ص.م

الدالة متناقصة على $[1, 3]$

$(1,-3)$ نقطة عظمى محلية أي الدالة تملك قيمة عظمى محلية تساوي -3 عند $x = 1$

$(3,-7)$ نقطة صغرى محلية أي الدالة تملك قيمة صغرى محلية تساوي -7 عند $x = 3$

يتبع

$f(x) = 9 + 3x - x^2 - \frac{1}{3}x^3$ (28)

$f'(x) = 3 - 2x - x^2$

$f'(x) = 0$

$-x^2 - 2x + 3 = 0$

$(x-1)(x+3) = 0$

$x = 1$ | $x = -3$

$f(1) = \frac{32}{3}$ | $f(-3) = 0$

∴ النقطتان الحرجتان هما $(-3,0)$ و $(1, \frac{32}{3})$

	-3		1	
إشارة $f'(x)$	$-$	$+$		$-$
اطراد الدالة $f(x)$	تناقص	تزايد		تناقص
	ن ص م		ن ع م	

الدالة متناقصة في $(-\infty,-3] \cup [1,\infty)$

الدالة متزايدة في $[-3, 1]$

$(-3,0)$ نقطة صغرى محلية أي أن للدالة قيمة صغرى محلية تساوي 0 عند $x=-3$

$(1, \frac{32}{3})$ نقطة عظمى محلية أي أن للدالة قيمة عظمى محلية تساوي $\frac{32}{3}$ عند $x=1$

$f''(x) = -2 - 2x$

$f''(x) = 0$

$-2 - 2x = 0$

$2x = -2$

$x = -1$

$f(-1) = \frac{16}{3}$

∴ $(-1, \frac{16}{3})$ نقطة انقلاب

	-1	
إشارة $f''(x)$	$+$	
تقعر منحنى $f(x)$	لأعلى	لأسفل

يتبع

$y'' = 6x - 12$

$y'' = 0$

$6x - 12 = 0$

$6x = 12$

$x = 2$

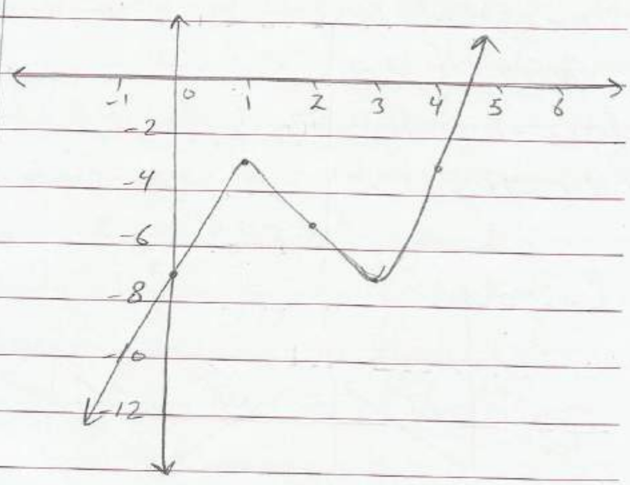
$f(2) = -5$

∴ $(2,-5)$ نقطة انقلاب

	2	
إشارة $f''(x)$	$-$	$+$
تقعر منحنى $f(x)$	لأسفل	لأعلى

مقعر لأسفل في $(-\infty, 2)$ مقعر لأعلى في $(2, \infty)$

x	-1	0	1	2	3	4	5
$f(x)$	-23	-7	-3	-5	-7	-3	13

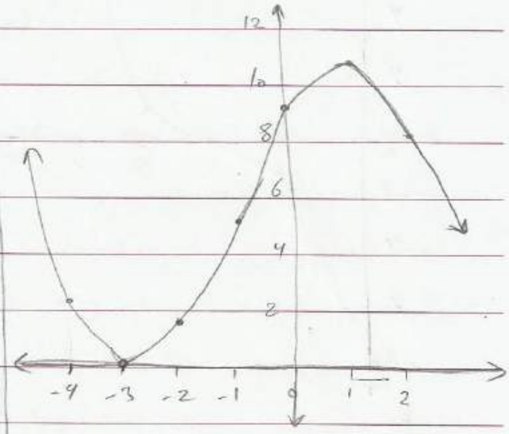


/ /

مقعر لأعلى في الفترة $(-\infty, -1)$

مقعر لأسفل في الفترة $(-1, \infty)$

x	-4	-3	-2	-1	0	1	2
$f(x)$	2,3	0	1,7	5,3	9	10,7	8,3



(29) $y = (x+1)(x-2)^2 + 1$

$y = (x+1)(x^2 - 4x + 4) + 1$

$y = x^3 - 4x^2 + \cancel{4x} + x^2 - \cancel{4x} + 4 + 1$

$y = x^3 - 3x^2 + 5$

$y' = 3x^2 - 6x$

$y' = 0$

$3x^2 - 6x = 0$

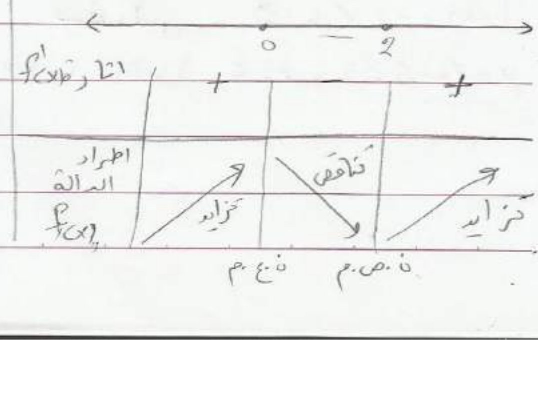
$3x(x-2) = 0$

$3x = 0 \quad | \quad x = 2$

$x = 0 \quad | \quad f(2) = 1$

$f(0) = 5$

∴ النقطتان الحرجتان هما $(2,1)$ و $(0,5)$



الدالة متزايدة في $(-\infty, 0] \cup [2, \infty)$

الدالة متناقصة في $[0, 2]$

$(0,5)$ نقطة عظمى محلية أي للدالة قيمة عظمى محلية تساوي 5 عند $x=0$

$(2,1)$ نقطة صغرى محلية أي للدالة قيمة صغرى محلية تساوي 1 عند $x=2$

$y'' = 6x - 6$

$y'' = 0$

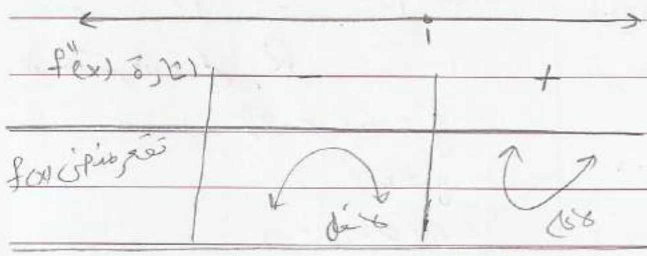
$6x - 6 = 0$

$6x = 6$

$x = 1$

$f(1) = 3$

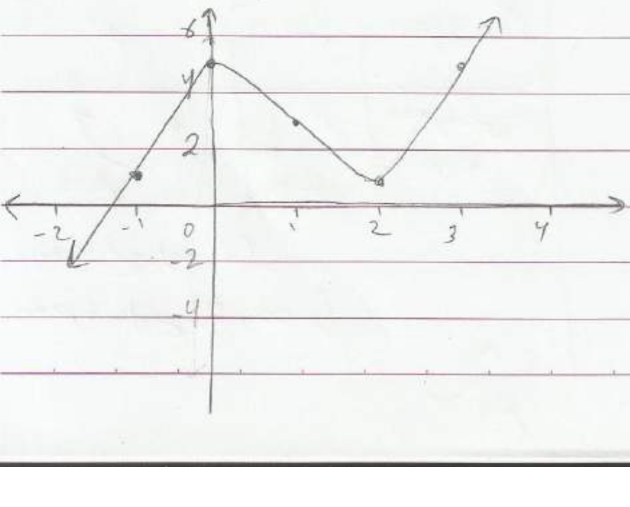
∴ $(1,3)$ نقطة انقلاب



مقعر لأعلى في $(1, \infty)$

مقعر لأسفل في $(-\infty, 1)$

x	-2	-1	0	1	2	3	4
$f(x)$	-15	1	5	3	1	5	21



30

$y = (x-2)^3$

$y' = 3(x-2)^2$

$y' = 0$

$3(x-2)^2 = 0$

$(x-2)^2 = 0$

$x - 2 = 0$

$x = 2$

$f(2) = 0$

∴ $(2,0)$ نقطة حرجة

	2	
إشارة $f'(x)$	$+$	$+$
اطراد الدالة $f(x)$	متزايدة	متزايدة

الدالة متزايدة على R

$y'' = 6(x-2)$

$y'' = 0$

$6(x-2) = 0$

$x - 2 = 0$

$x = 2$

$f(2) = 0$

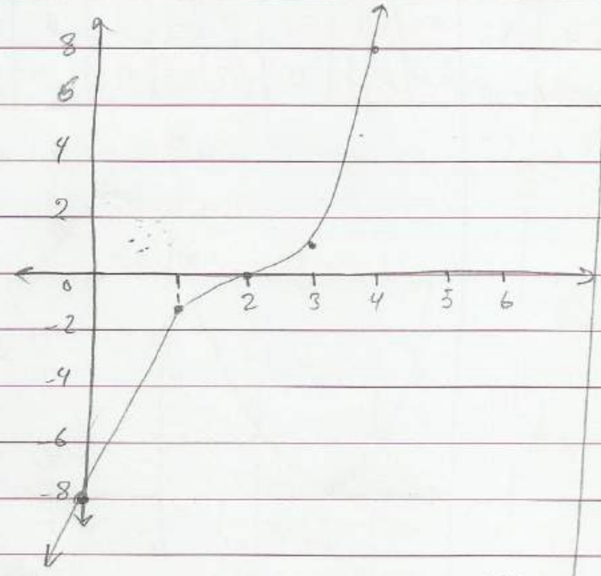
∴ $(2,0)$ نقطة انقلاب

	2	
إشارة $f''(x)$	$-$	$+$
تقعر منحنى $f(x)$	للأسفل	للأعلى

مقعر للأعلى في $(2, \infty)$

مقعر للأسفل في $(-\infty, 2)$

x	-1	0	1	2	3	4	5
$f(x)$	-27	-8	-1	0	1	8	27



31 أوجد عددين موجبين مجموعهما يساوي 10 وحاصل ضربهما أكبر ما يمكن

$y + x = 10$

$y = 10 - x$

$f(x) = x(10 - x)$

$f(x) = 10x - x^2$

$f'(x) = 10 - 2x$

$f'(x) = 0$

$10 - 2x = 0$

$2x = 10$

$x = 5$

$f''(x) = -2$

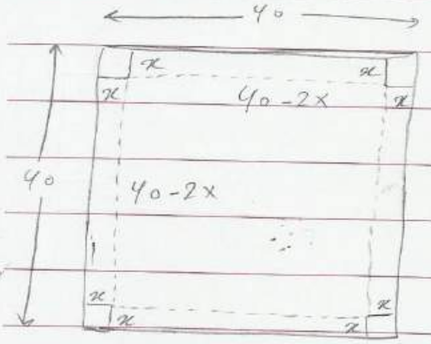
$f''(5) = -2 < 0 \Rightarrow$ قيمة عظمى

∴ العددان هما $x = 5$, $y = 10 - 5 = 5$

تابع

/ /

(32) قطعة من الورق المقوى مربعة الشكل طول ضلعها 40cm يراد بها عمل علبة بدون غطاء إذا قطعت من أركانها 4 مربعات متساوية، وثني الجزء الباقي لأعلى من العلبة شكل متوازي مستطيلات، فأوجد القيمة العظمى لحجم العلبة



$V = lwh$

$V = (40-2x)^2(x)$

$V = 1600x - 160x^2 + 4x^3$

$V' = 1600 - 320x + 12x^2$

$V' = 0$

$1600 - 320x + 12x^2 = 0$

$(x-20)(3x-20) = 0$

$x = 20 \;/\; x = \frac{20}{3}$

$V'' = -320 + 24x$

$V''(20) = 160 > 0 \Rightarrow$ قيمة صغرى (مرفوضة)

$V''(\frac{20}{3}) = -160 < 0 \Rightarrow$ قيمة عظمى

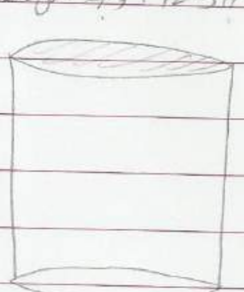
∴ يكون حجم الصندوق أكبر ما يمكن عندما

الطول = العرض $= 40 - 2(\frac{20}{3}) = \frac{80}{3} \approx 26,7\ cm$

والارتفاع يساوي $\frac{20}{3} \approx 6,7\ cm$

ويكون $V = \left(40 - 2(\frac{20}{3})\right)^2 (\frac{20}{3}) = 4740,7\ cm^2$

(33) وعاء على شكل أسطوانة دائرية قائمة بدون غطاء حجمه $125\pi\ m^3$ أوجد أقل مقدار من المعدن اللازم لصنعه



$V = 125\pi$

$\cancel{\pi} r^2 h = 125\cancel{\pi}$

$h = \frac{125}{r^2}$

$A = 2\pi r h + \pi r^2$

$A = 2\pi \cancel{r} \left(\frac{125}{r^{\cancel{2}}}\right) + \pi r^2$

$A = 250\pi r^{-1} + \pi r^2$

$A' = -250\pi r^{-2} + 2\pi r$

$A' = 0$

$\frac{-250\pi}{r^2} + 2\pi r = 0$

$2\cancel{\pi} r = \frac{250\cancel{\pi}}{r^2}$

$r^3 = \frac{250}{2}$

$r = \sqrt[3]{125} = 5\ m$

$A'' = \frac{500\pi}{r^3} + 2\pi$

$A''(5) = 6\pi > 0 \Rightarrow$ قيمة صغرى

∴ $r = 5\ m$ و $h = \frac{125}{25} = 5\ m$

وكمية المعدن: $A = 75\pi\ m^2 \approx 235,6\ m^2$

/ /

العلاقة بين التفاضل والتكامل ص١٠٠

مثال ①: إذا كانت $F(x) = x^2$ و $f(x) = 2x$ فأثبت أن الدالة F دالة أصلية للدالة f في R

$F'(x) = 2x = f(x) \quad \forall x \in R$

مثال ②: أوجد مجموعة الدوال الأصلية لكل دالة مما يأتي في الفترة المعطاة:

a) $f(x) = 3x^2 , x \in R$

$F(x) = x^3 + c$

b) $f(x) = \cos x , x \in [0, \frac{\pi}{2}]$

$F(x) = \sin x + c$

c) $f(x) = \sec^2 x , x \in [0, \frac{\pi}{3}]$

$F(x) = \tan x + c$

تدريب: أوجد مجموعة الدوال الأصلية لكل دالة مما يأتي في الفترة المعطاة

a) $f(x) = 6x^2 , x \in R$

$F(x) = \frac{6x^3}{3} + c$

$F(x) = 2x^3 + c$

b) $f(x) = x + 1 , x \in R$

$F(x) = \frac{x^2}{2} + x + c$

/ /

التكامل غير المحدد

← في التفاضل نطرح من الأس واحد   ← في التكامل نزيد واحد ونقسم على الأس الجديد

مقدمات هامة :

المشتقات

- $\frac{d}{dx}(\sin x) = \cos x$
- $\frac{d}{dx}(\cos x) = -\sin x$
- $\frac{d}{dx}(\tan x) = \sec^2 x$
- $\frac{d}{dx}(\cot x) = -\csc^2 x$
- $\frac{d}{dx}(\sec x) = \sec x \tan x$
- $\frac{d}{dx}(\csc x) = -\csc x \cot x$

التكاملات

- $\int \sin x \, dx = -\cos x + c$
- $\int \cos x \, dx = \sin x + c$
- $\int \sec^2 x \, dx = \tan x + c$
- $\int \csc^2 x \, dx = -\cot x + c$
- $\int \sec x \tan x \, dx = \sec x + c$
- $\int \csc x \cot x \, dx = -\csc x + c$

متطابقات هامة

$\sin 2x = 2\sin x \cos x$

$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$

$= 2\cos^2 x - 1$

$= 1 - 2\sin^2 x$ $\Big\} \Rightarrow$ كثيراً ما نحتاجهم

$\Rightarrow \cos 2x = 2\cos^2 x - 1$

$\cos^2 x = \frac{1}{2}(1 + \cos 2x)$

$\Rightarrow \cos 2x = 1 - 2\sin^2 x$

$2\sin^2 x = 1 - \cos 2x$

$\sin^2 x = \frac{1}{2}(1 - \cos 2x)$

- $\int f'(x) \, [f(x)]^n \, dx = \frac{[f(x)]^{n+1}}{n+1} + c$
- $\int f'(x) \sin f(x) \, dx = -\cos f(x) + c$

مشتقة الزاوية   التكامل للدالة المثلثية

- $\int K \, dx = Kx + c$ حيث K ثابت

مثال ①: أوجد كلاً من التكاملات الآتية

a) $\int 3x^6 \, dx$

$\int 3x^6 \, dx = \frac{3x^7}{7} + c$

b) $\int 8 \, dx$

$\int 8 \, dx = 8x + c$

c) $\int 4x^{-5} \, dx$

$\int 4x^{-5} \, dx = \frac{\cancel{4}x^{-4}}{-\cancel{4}} + c = \frac{-1}{x^4} + c$

d) $\int \sqrt{x} \, dx$

$\int \sqrt{x} \, dx = \int x^{\frac{1}{2}} dx = \frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}} + c = \frac{2}{3}\sqrt{x^3} + c$

e) $\int 7x^{\frac{4}{3}} \, dx$

$\int 7x^{\frac{4}{3}} \, dx = \cancel{7} x^{\frac{7}{3}} \left(\frac{3}{\cancel{7}}\right) + c = 3\sqrt[3]{x^7} + c$

f) $\int x^{\frac{-2}{5}} \, dx$

$\int x^{\frac{-2}{5}} \, dx = \frac{5}{3} x^{\frac{3}{5}} + c = \frac{5}{3}\sqrt[5]{x^3} + c$

مثال ②: أوجد كلاً من التكاملات الآتية :

a) $\int 5(5x+1)^3 \, dx$

$\int 5(5x+1)^3 \, dx = \frac{1}{4}(5x+1)^4 + c$

b) $\int 2u(u^2+3)^4 \, du$

$\int 2u(u^2+3)^4 \, du = \frac{1}{5}(u^2+3)^5 + c$

c) $\int 3x^2 \sqrt{x^3 - 1} \, dx$

$\int 3x^2 (x^3-1)^{\frac{1}{2}} dx = \frac{2}{3}(x^3-1)^{\frac{3}{2}} + c$

$= \frac{2}{3}\sqrt{(x^3-1)^3} + c$

d) $\int (2x-1)(x^2-x+4)^{-2} \, dx$

$\int (2x-1)(x^2-x+4)^{-2} dx = -(x^2-x+4)^{-1} + c$

$= \frac{-1}{x^2-x+4} + c$

/ /

مثال ③: أوجد التكاملات

$\int \sin^5 x \cos x \, dx$ (a

$\int \underbrace{\sin^5 x}_{f} \underbrace{\cos x}_{f'} \, dx = \frac{\sin^6 x}{6} + c$

$\int \csc^4 x \cot x \, dx$ (b

$\int \csc^4 x \cot x \, dx = -\int \underbrace{(\csc x)^3}_{f} \underbrace{(-\csc x \cot x)}_{f'} \, dx$

$= -\frac{\csc^4 x}{4} + c$

$\int \sin\theta \cos\theta \, d\theta$ (c

$\int \underbrace{\sin\theta}_{f} \underbrace{\cos\theta}_{f'} \, d\theta = \frac{\sin^2\theta}{2} + c$

or $-\int \underbrace{-\sin\theta}_{f'} \underbrace{\cos\theta}_{f} \, d\theta = -\frac{\cos^2\theta}{2} + c$

or $\frac{1}{2}\int 2\sin\theta \cos\theta \, d\theta = \frac{1}{2}\int \sin 2\theta \, d\theta$

$2 \times \frac{1}{2}\int 2\sin 2\theta \, d\theta = -\cos 2\theta + c$

تدريب: أوجد التكاملات الآتية:

$\int 2z(z^2+4)^8 \, dz$ (a

$\int 2z(z^2+4)^8 \, dz = \frac{1}{9}(z^2+4)^9 + c$

$\int \frac{2x}{\sqrt{x^2+8}} \, dx$ (b

$\int \frac{2x}{\sqrt{x^2+8}} \, dx = \int 2x(x^2+8)^{-\frac{1}{2}} \, dx$

$= 2(x^2+8)^{\frac{1}{2}} + c = 2\sqrt{x^2+8} + c$

$\int \sqrt{\tan x} \sec^2 x \, dx$ (c

$\int (\tan x)^{\frac{1}{2}} \sec^2 x \, dx = \frac{2}{3}(\tan x)^{\frac{3}{2}} + c$

$= \frac{2}{3}\sqrt{\tan^3 x} + c$

$\int \sec^3 x \tan x \, dx$ (d

$\int (\sec x)^2 (\sec x \tan x) \, dx$

$= \frac{\sec^3 x}{3} + c$

مثال ④: أوجد التكاملات

$\int 6\cos^2 x \sin x \, dx$ (a

$-6\int (\cos x)^2 (-\sin x) \, dx$

$= \frac{-6\cos^3 x}{3} + c = -2\cos^3 x + c$

$\int 8x^3(x^4+1)^6 \, dx$ (b

$2\int 4x^3(x^4+1)^6 \, dx = \frac{2}{7}(x^4+1)^7 + c$

$\int \frac{-6x}{\sqrt{1-x^2}} \, dx$ (c

$\int -6x(1-x^2)^{-\frac{1}{2}} \, dx$

$= 3\int -2x(1-x^2)^{-\frac{1}{2}} \, dx$

$= 3(1-x^2)^{\frac{1}{2}}(2) + c$

$= 6\sqrt{1-x^2} + c$

مثال ⑤: أوجد التكاملات الآتية:

$\int (4x^3+6x^2-9x) \, dx$ (a

$= x^4 + 2x^3 - \frac{9}{2}x^2 + c$

$\int (x-1)(x+5) \, dx$ (b

$= \int (x^2 + 5x - x - 5) \, dx$

$= \int (x^2 + 4x - 5) \, dx$

$= \frac{x^3}{3} + 2x^2 - 5x + c$

$\int (x^2+1)^2 \, dx$ (c

$\int (x^4 + 2x^2 + 1) \, dx$

$= \frac{x^5}{5} + \frac{2}{3}x^3 + x + c$

$\int \frac{t^2-8t+15}{t-3} \, dt, \; t \neq 3$ (d

$\int \frac{(t-5)\cancel{(t-3)}}{\cancel{(t-3)}} \, dt = \int (t-5) \, dt$

$= \frac{t^2}{2} - 5t + c$

/ /

$$\text{e)}\quad \int \frac{x^5+4}{x^3}\,dx \quad , x \neq 0$$

$$\int (x^2 + 4x^{-3})\,dx$$

$$= \frac{x^3}{3} - 2x^{-2} + c = \frac{x^3}{3} - \frac{2}{x^2} + c$$

مثال (6): أوجد كلاً من التكاملات الآتية

$$\text{a)}\quad \int \left(\frac{1+\sin x}{\cos^2 x}\right) dx$$

$$\int (\sec^2 x + \tan x \sec x)\,dx$$

$$= \tan x + \sec x + c$$

$$\text{b)}\quad \int \sin^2 x\,dx$$

$$\frac{1}{2}\int (1-\cos 2x)\,dx$$

$$= \frac{1}{2}\left(x - \frac{\sin 2x}{2}\right) + c$$

$$= \frac{x}{2} - \frac{\sin 2x}{4} + c$$

$$\text{c)}\quad \int \cos^3 x\,dx$$

$$\int \cos x (1-\sin^2 x)\,dx$$

$$\int \cos x\,dx - \int \cos x \sin^2 x\,dx$$

$$\sin x - \frac{\sin^3 x}{3} + c$$

$$\text{d)}\quad \int \cot^2 \theta\,d\theta$$

$$\because 1 + \cot^2\theta = \csc^2\theta$$

$$\therefore \cot^2\theta = \csc^2\theta - 1$$

$$= \int (\csc^2\theta - 1)\,d\theta$$

$$= -\cot\theta - \theta + c$$

$$\text{e)}\quad \int \sec^4 x\,dx$$

$$\int (1+\tan^2 x)\sec^2 x\,dx$$

$$\int \left[\sec^2 x + (\tan x)^2(\sec^2 x)\right] dx$$

$$= \tan x + \frac{\tan^3}{3} + c$$

تمارين الكتاب ص 111: أوجد التكاملات الآتية

(١) $\int (5x^4 + 3x^2 - 4x + 7)\,dx$

$$= x^5 + x^3 - 2x^2 + 7x + c$$

(٢) $\int (x-2)(x^2+1)\,dx$

$$\int (x^3 + x - 2x^2 - 2)\,dx$$

$$= \frac{x^4}{4} + \frac{x^2}{2} - \frac{2}{3}x^3 - 2x + c$$

(٣) $\int x^3(3x+4)\,dx$

$$\int (3x^4 + 4x^3)\,dx = \frac{3}{5}x^5 + x^4 + c$$

(٤) $\int \frac{1}{x^4}(x^2 + x^5)\,dx$

$$\int (x^{-2} + x)\,dx = -x^{-1} + \frac{x^2}{2} + c = \frac{1}{x} + \frac{x^2}{2} + c$$

(٥) $\int \sqrt{x}\,dx$

$$\int x^{\frac{1}{2}}\,dx = \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} + c = \frac{2}{3}\sqrt{x^3} + c$$

(٦) $\int \sqrt{x}\,(x+2)\,dx$

$$\int x^{\frac{1}{2}}(x+2)\,dx = \int (x^{\frac{3}{2}} + 2x^{\frac{1}{2}})\,dx$$

$$= \frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}} + 2x^{\frac{3}{2}}\left(\frac{2}{3}\right) + c$$

$$= \frac{2}{5}\sqrt{x^5} + \frac{4}{3}\sqrt{x^3} + c$$

(٧) $\int \sqrt[3]{x-2}\,dx$

$$\int (x-2)^{\frac{1}{3}}\,dx = \frac{3}{4}(x-2)^{\frac{4}{3}} + c = \frac{3}{4}\sqrt[3]{(x-2)^4} + c$$

(٨) $\int \sqrt{3x+1}\,dx$

$$\frac{1}{3}\int 3(3x+1)^{\frac{1}{2}}\,dx = \frac{1}{3}(3x+1)^{\frac{3}{2}}\left(\frac{2}{3}\right) + c$$

$$= \frac{2}{9}\sqrt{(3x+1)^3} + c$$

(٩) $\int \frac{x^2 - 7x - 18}{x+2}\,dx$

$$\int \frac{(x-9)\cancel{(x+2)}}{\cancel{(x+2)}}\,dx = \int (x-9)\,dx$$

$$= \frac{x^2}{2} - 9x + c$$

(١٠) $\int x(x^2+12)^3\,dx$

$$\frac{1}{2}\int 2x(x^2+12)^3\,dx = \frac{1}{2}(x^2+12)^4\left(\frac{1}{4}\right) + c$$

$$= \frac{(x^2+12)^4}{8} + c$$

$\int (2\cos^2 x - 1)\,dx$ (17)

$2\int \cos^2 x\,dx - \int dx$

$\cancel{2}\times\frac{1}{\cancel{2}}\int (1+\cos 2x)\,dx - \int dx$

$\cancel{\int dx} + \int \cos 2x\,dx - \cancel{\int dx}$

$\frac{\sin 2x}{2} + C$

$\int \cot^4 x \csc^2 x\,dx$ (18)

$-\int (\cot x)^4(-\csc^2 x)\,dx$

$\frac{-\cot^5 x}{5} + C$

$\int \cos x \sqrt[3]{\sin x - 5}\,dx$ (19)

$\int \cos x\,(\sin x - 5)^{\frac{1}{3}}\,dx$

$\frac{3}{4}(\sin x - 5)^{\frac{4}{3}} + C = \frac{3}{4}\sqrt[3]{(\sin x - 5)^4} + C$

$\int \sin x\,(1 - \sin^2 x)\,dx$ (20)

$-\int -\sin x\,(\cos x)^2\,dx$

$\frac{-\cos^3 x}{3} + C$

$\int \tan^2 x\,dx$ (21)

$\int (\sec^2 x - 1)\,dx$

$\tan x - x + C$

$\int (\tan^3 x + \tan x)\,dx$ (22)

$\int \tan^3 x\,dx + \int \tan x\,dx$

$\int \tan x(\sec^2 x - 1)\,dx + \int \tan x\,dx$

$\int \tan \sec^2 x\,dx - \cancel{\int \tan x\,dx} + \cancel{\int \tan x\,dx}$

$\frac{\tan^2 x}{2} + C$

$\int 5 \tan x \cot x\,dx$ (24)

$\int 5\,dx = 5x + C$

$\int (\sin x + \cos x)^2\,dx$ (23)

$\int \sin^2 x\,dx + \int \sin 2x\,dx + \int \cos^2 x\,dx$

$\int (1 - \cos^2 x)\,dx + \int \sin 2x\,dx + \int \cos^2 x\,dx$

$\int dx - \cancel{\int \cos^2 x\,dx} + \int \sin 2x\,dx + \cancel{\int \cos^2 x\,dx}$

$x - \frac{\cos 2x}{2} + C$

$\int (x+7)\sqrt{x^2 + 14x - 1}\,dx$ (11)

$\frac{1}{2}\int 2(x+7)(x^2+14x-1)^{\frac{1}{2}}\,dx$

$\frac{1}{2}\int (2x+14)(x^2+14x-1)^{\frac{1}{2}}\,dx$

$\frac{1}{\cancel{2}}(x^2+14x-1)^{\frac{3}{2}}\left(\frac{\cancel{2}}{3}\right) + C$

$= \frac{1}{3}\sqrt{(x^2+14x-1)^3} + C$

$\int \frac{-2}{\sqrt{1-2x}}\,dx$ (12)

$\int -2(1-2x)^{-\frac{1}{2}}\,dx = 2\sqrt{1-2x} + C$

$\int x^3(x^4+1)^6\,dx$ (13)

$\frac{1}{4}\int 4x^3(x^4+1)^6\,dx$

$\frac{1}{4}(x^4+1)^7\left(\frac{1}{7}\right) + C = \frac{1}{28}(x^4+1)^7 + C$

$\int 15x^2\sqrt[5]{x^3+7}\,dx$ (14)

$\int 15x^2(x^3+7)^{\frac{1}{5}}\,dx$

$5\int 3x^2(x^3+7)^{\frac{1}{5}}\,dx$

$5(x^3+7)^{\frac{6}{5}}\left(\frac{5}{6}\right) + C$

$\frac{25}{6}\sqrt[5]{(x^3+7)^6} + C$

$\int \frac{(2x-3)}{(x^2-3x+1)^5}\,dx$ (15)

$\int (2x-3)(x^2-3x+1)^{-5}\,dx$

$\frac{(x^2-3x+1)^{-4}}{-4} + C = \frac{-1}{4(x^2-3x+1)^4} + C$

$\int \sin 3u\,du$ (16)

$\frac{1}{3}\int 3\sin 3u\,du$

$\frac{1}{3}(-\cos 3u) + C = \frac{-\cos 3u}{3} + C$

(25) $\int \sin^3 2x \cos 2x\,dx$

$\frac{1}{2}\int (\sin 2x)^3(2\cos 2x)\,dx$

$\frac{1}{2}\cdot\frac{\sin^4 2x}{4} + C = \frac{\sin^4(2x)}{8} + C$

(26) $\int \frac{\cot}{\sin x}\,dx$

$\int \cot x \csc x\,dx$

$-\csc x + C$

مثال①: إذا كان ميل المماس لمنحني $f(x)$ يعطى بالعلاقة $m = f'(x) = 2x-4$ فأوجد معادلة هذا المنحني عندما يمر بـ $(2,-1)$

$F(x) = \int f'(x)\,dx$

$F(x) = \int 2x-4\,dx$

$F(x) = x^2 - 4x + c$

$\because$ المنحني يمر بـ $(2,-1)$

$\therefore -1 = 4 - 8 + c$

$-1 = -4 + c$

$c = 3$

$\therefore F(x) = x^2 - 4x + 3$

مثال②: إذا كان ميل المماس لـ $y = f(x)$ يعطى بـ $m = \frac{dy}{dx} = 3x^2 + K$ فأوجد معادلة هذا المنحني علماً بأنه يمر بالنقطتين $(0,5)$، $(-3,2)$

$F(x) = \int f'(x)\,dx$

$= \int 3x^2 + K\,dx$

$= x^3 + Kx + c$

$\because$ المنحني يمر بـ $(0,5)$

$\therefore 5 = (0)^3 + (0)(K) + c$

$c = 5$

$\therefore F(x) = x^3 + Kx + 5$

$\because$ المنحني يمر بـ $(-3,2)$

$\therefore 2 = (-3)^3 + (-3)K + 5$

$2 = -27 - 3K + 5$

$24 = -3K$

$K = -8$

$\therefore F(x) = x^3 - 8x + 5$

ملاحظة هامة: إذا كان هناك مجهول فلابد من وجود معطيين، وإذا كان هناك ثلاث مجاهيل نستحتاج لثلاث معطيات وهكذا....

مثال③: أوجد المنحني الذي ميل مماسه يعطى بـ $m = \frac{dy}{dx} = 3\sin^2 x \cos x$ علماً بأنه يمر بالنقطة $(\frac{\pi}{6}, 0)$

$F(x) = \int f'(x)\,dx = 3\int \sin^2 x \cos x\,dx$

$= \cancel{3} \cdot \frac{\sin^3 x}{\cancel{3}} + c$

$= \sin^3 x + c$

$\because$ يمر بالنقطة $(\frac{\pi}{6}, 0)$

$\therefore 0 = \left(\sin\frac{\pi}{6}\right)^3 + c$

$0 = \frac{1}{8} + c$

$c = \frac{-1}{8}$

$F(x) = \sin^3 x - \frac{1}{8}$

تدريب: أوجد معادلة المنحني الذي ميل مماسه يعطى بـ $m = f'(x) = 3x^2 - 8x + 5$ ويمر بالنقطة $(-1,9)$

$F(x) = \int f'(x)\,dx = \int (3x^2 - 8x + 5)\,dx$

$= x^3 - 4x^2 + 5x + c$

$\because$ المنحني يمر بالنقطة $(-1,9)$

$\therefore 9 = -1 - 4 - 5 + c$

$9 = -10 + c$

$c = 19$

$F(x) = x^3 - 4x^2 + 5x + 19$

مثال④: دالة مشتقتها الأولى $\frac{dy}{dx} = 2x - 6$ وقيمتها الصغرى المحلية -4. أوجد هذه الدالة

لدينا نقطة صغرى محلية (أي نقطة حرجة) $\Rightarrow \frac{dy}{dx} = 0$

$2x - 6 = 0$

$2x = 6$

$x = 3$

$\therefore$ النقطة هي $(3,-4)$

$F(x) = \int f'(x)\,dx$

$= \int (2x - 6)\,dx$

$= x^2 - 6x + c$

$\because$ يمر بالنقطة $(3,-4)$

$\therefore -4 = 9 - 18 + c$

$c = 5$

$\therefore F(x) = x^2 - 6x + 5$

/ /

$$S \xrightarrow{\text{اشتقاق}} V \longrightarrow a$$

إزاحة   سرعة   تسارع (عجلة)

$$a \xrightarrow{\text{تكامل}} S$$

مثال 5: جسم يتحرك من السكون بـ $V = 12t - 3t^2$
أوجد إزاحة الجسم بعد 3 sec

$$S(t) = \int \frac{ds}{dt}\, dt = \int (12t - 3t^2)\, dt$$
$$S = 6t^2 - t^3 + c$$
$$S = 0 \Leftarrow t = 0$$
$$0 = c$$
$$S = 6t^2 - t^3$$
$$S\Big|_{t=3} = 6(9) - 27 = 27\,m$$

مثال 6: يتحرك جسم من السكون بحيث كان تسارعه يعطى بـ $a = 8\sin 2t$ أوجد سرعة الجسم بعد $\frac{\pi}{2}$ sec من لحظة بدء الحركة

$$V = \int a\, dt = \int 8 \sin 2t\, dt$$
$$= 4\int 2 \sin 2t\, dt$$
$$= -4 \cos 2t + c$$
$$0 = -4\cos 0^\circ + c \qquad t = 0 \Rightarrow v = 0$$
$$0 = -4 + c$$
$$c = 4$$
$$V = -4\cos 2t + 4$$
$$V\Big|_{t=\frac{\pi}{2}} = -4\cos\pi + 4 = 8\, cm/s$$

مثال 7: العلاقة بين سرعة جسم ما والزمن هي $v = 10 + 2t$ فأوجد المسافة المقطوعة في 8 sec من لحظة الحركة

$$S = \int \frac{ds}{dt}\, dt = \int (10 + 2t)\, dt$$
$$= 10t + t^2 + c$$
$$t = 0 \Rightarrow S = 0$$
$$0 = c$$
$$\therefore S = t^2 + 10t$$
$$S\Big|_{t=8} = 144\, m$$

مثال 8: العلاقة بين التسارع والزمن لجسم ما تعطى بالعلاقة $a = 4\sin\frac{t}{2}$ وكانت سرعته الابتدائية 6 cm/sec فأوجد سرعة هذا الجسم وبعده بعد π sec من لحظة بدء الحركة

$$V = \int \frac{dv}{dt}\, dt = \int 4 \sin\frac{t}{2}\, dt = 4\int \sin\tfrac{1}{2}t\, dt$$
$$= \frac{4}{0,5}\int 0,5 \sin\tfrac{1}{2}t\, dt$$
$$= -8\cos\frac{t}{2} + c$$
$$6 = -8\cos 0 + c \qquad t = 0 \Rightarrow v = 6$$
$$6 = -8 + c$$
$$c = 14$$
$$\therefore V = -8\cos\frac{t}{2} + 14$$
$$V\Big|_{t=\pi} = -8\cos\frac{\pi}{2} + 14 = 14\, cm/sec$$

$$S = \int \frac{ds}{dt}\, dt = \int \left(-8\cos\frac{t}{2} + 14\right) dt$$
$$= \frac{-8}{0,5}\int \tfrac{1}{2}\cos\tfrac{1}{2}t\, dt + \int 14\, dt$$
$$= -16\sin\frac{t}{2} + 14t + c$$
$$t = 0 \Rightarrow S = 0$$
$$0 = \cancel{-16\sin 0} + \cancel{14(0)} + c$$
$$c = 0$$
$$\therefore S = -16\sin\frac{t}{2} + 14t$$

$$S\Big|_{t=\pi} = -16\sin\frac{\pi}{2} + 14\pi$$
$$= (-16 + 14\pi)\, cm$$
$$\simeq 28\, cm$$

/ /

تمارين الكتاب ص 118

أوجد معادلة المنحنى $y=f(x)$ إذا كان ميل المماس m عند النقطة (x,y) المعطاة والواقعة عليه هو $f'(x)$

① $f'(x)=3x^2-2x+1 \quad , (1,5)$

$f(x)=\int f'(x)\,dx$

$=\int(3x^2-2x+1)\,dx$

$=x^3-x^2+x+c$

∵ المنحنى يمر بـ $(1,5)$

$5=\cancel{1}-\cancel{1}+1+c$

$c=4$

$\therefore f(x)=x^3-x^2+x+4$

② $f'(x)=x^2(15-x) \quad , (0,7)$

$f'(x)=15x^2-x^3$

$f(x)=\int f'(x)\,dx$

$=\int(15x^2-x^3)\,dx$

$=\frac{15}{3}x^3-\frac{x^4}{4}+c$

$=5x^3-\frac{x^4}{4}+c$

∵ المنحنى يمر بـ $(0,7)$

$7=c$

$\therefore f(x)=5x^3-\frac{x^4}{4}+7$

③ $f'(x)=(4-x)^3 \quad , (4,-2)$

$y=\int f'(x)\,dx=\int(4-x)^3\,dx$

$=-1\int -1(4-x)^3\,dx$

$=\frac{-(4-x)^4}{4}+c$

∵ المنحنى يمر بالنقطة $(4,-2)$

$\therefore -2=\frac{-(0)^4}{4}+c$

$c=-2$

$y=\frac{-(4-x)^4}{4}-2$

④ $f'(x)=3\cos^3x\sin x \quad , (0,1)$

$f(x)=\int f'(x)\,dx=-3\int\cos^3x(-\sin x)\,dx$

$=-3\,\frac{\cos^4x}{4}+c$

∵ المنحنى يمر بـ $(0,1)$

$\therefore 1=\frac{-3}{4}(\cos 0^\circ)^4+c$

$1=\frac{-3}{4}+c$

$c=\frac{7}{4}=1{,}75$

$\therefore f(x)=y=\frac{-3}{4}\cos^4x+1{,}75$

⑤ $f'(x)=\sec^2x \quad , (\frac{\pi}{3},0)$

$f(x)=\int f'(x)\,dx=\int\sec^2x\,dx=\tan x+c$

∵ المنحنى يمر بـ $(\frac{\pi}{3},0)$

$\therefore 0=\tan 60^\circ+c$

$c=-\sqrt{3}$

$\therefore f(x)=\tan x-\sqrt{3}$

⑥ $f'(x)=(x-2)(x+3) \quad , (0,-4)$

$f'(x)=x^2+3x-2x-6=x^2+x-6$

$f(x)=\int f'(x)\,dx=\int(x^2+x-6)\,dx$

$=\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}-6x+c$

∵ المنحنى يحقق $(0,-4)$

$\therefore -4=c$

$\therefore f(x)=\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}-6x-4$

⑦ إذا كان ميل المماس لمنحنى $y=f(x)$ عند أي نقطة واقعة عليه يعطى بـ $f'(x)=3x^2-10x+k$ فأوجد معادلة المنحنى علماً بأنه يمر بالنقطتين $(1,0)$ و $(0,-3)$

$f(x)=\int f'(x)\,dx=\int(3x^2-10x+k)\,dx$

$=x^3-5x^2+kx+c$

∵ المنحنى يمر بـ $(0,-3)$

$-3=c$

$\therefore f(x)=x^3-5x^2+kx-3$

∵ المنحنى يمر بـ $(1,0)$

$0=1-5+k-3$

$k=7$

$\therefore f(x)=x^3-5x^2+7x-3$

⑧ دالة مشتقتها الأولى $\frac{dy}{dx} = -2x+6$ وقيمتها العظمى المحلية تساوي 6 أوجد قاعدة الدالة

∵ لها نقطة حرجة ∴ $\frac{dy}{dx} = 0 \Rightarrow$

$0 = -2x + 6$

$6 = 2x$

$x = 3$

∴ النقطة هي $(3, 6)$

$f(x) = \int \frac{dy}{dx}\, dx = \int (-2x+6)\, dx$

$= -x^2 + 6x + c$

∵ المنحنى يمر بالنقطة $(3,6)$

∴ $6 = -9 + 18 + c$

$6 = 9 + c$

$c = -3$

∴ $f(x) = -x^2 + 6x - 3$

⑨ أوجد الدالة التي مشتقتها الأولى $\frac{dy}{dx} = 3x^2 - 3$ وقيمتها الصغرى المحلية تساوي -4

$\frac{dy}{dx} = 0$

$3x^2 - 3 = 0$

$3(x^2 - 1) = 0$

$3 \neq 0$ or $x^2 = 1$

$x = \pm 1$

∴ النقطتان هما $(1, -4)$ $(-1, -4)$

$\frac{d^2y}{dx^2} = 6x$

$f''(1) = 6 > 0 \Rightarrow$ قيمة صغرى

$f''(-1) = -6 < 0 \Rightarrow$ قيمة عظمى "مرفوض"

∴ النقطة هي $(1, -4)$

$f(x) = \int f'(x)\, dx = \int (3x^2 - 3)\, dx$

$= x^3 - 3x + c$

∵ المنحنى له نقطة صغرى عند $(1, -4)$

$-4 = 1 - 3 + c$

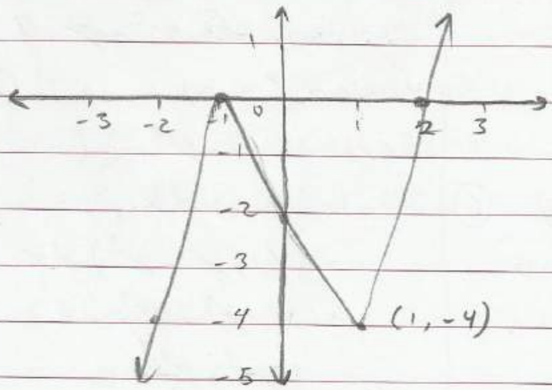
$-4 = -2 + c$

$c = -2$

∴ $f(x) = x^3 - 3x - 2$

للتوضيح فقط

x	3	2	1	0	-1	-2	-3
$f(x)$	16	0	-4	-2	0	-4	-20



أوجد بعد جسم متحرك بالسنتيمترات بكل ثانية إذا كانت سرعته v cm/sec في كل مما يأتي

⑩ $v = 2t + 5$, $s = 0$, $t = 0$

$s = \int v\, dt = \int (2t+5)\, dt = t^2 + 5t + c$

∵ $s = 0$, $t = 0$

∴ $0 = c$

∴ $s = t^2 + 5t$

⑪ $v = (t-5)(t+1)$, $s = 2$, $t = 1$

$v = t^2 + t - 5t - 5$

$= t^2 - 4t - 5$

$s = \int v\, dt = \int (t^2 - 4t - 5)\, dt$

$= \frac{t^3}{3} - 2t^2 - 5t + c$

/ /

$a = 6t + 2 \quad , s = 0 \quad , v = 0 \quad , t = 0$ (14)

$v = \int a\, dt = \int (6t+2)\, dt = 3t^2 + 2t + c$

$\because v = 0 , t = 0$

$0 = c$

$\therefore v = 3t^2 + 2t$

$s = \int v\, dt = \int (3t^2 + 2t)\, dt = t^3 + t^2 + c$

$\because s = 0 , t = 0$

$\therefore 0 = c$

$\therefore s = t^3 + t^2$

$a = 8(1+2t)^3 \quad , s = 3 \quad , v = 1 \quad , t = 0$ (15)

$v = \int a\, dt = \int 8(1+2t)^3\, dt = 4\int 2(1+2t)^3\, dt$

$= \frac{\cancel{4}(1+2t)^4}{\cancel{4}} + c = (1+2t)^4 + c$

$\because v = 1 , t = 0$

$\therefore \cancel{1} = \cancel{(1+0)^4} + c$

$c = 0$

$\therefore v = (1+2t)^4$

$s = \int v\, dt = \int (1+2t)^4\, dt = \frac{1}{2}\int 2(1+2t)^4\, dt$

$= \frac{1}{2} \cdot \frac{(1+2t)^5}{5} + c = \frac{(1+2t)^5}{10} + c$

$\because s = 3 , t = 0$

$\therefore 3 = \frac{1}{10} + c$

$c = \frac{29}{10}$

$\therefore s = \frac{(1+2t)^5 + 29}{10}$

$a = 1 - 4t \quad , s = 5 \quad , v = 0 \quad , t = 0$ (16)

$v = \int \frac{dv}{dt}\, dt = \int (1-4t)\, dt = t - 2t^2 + c$

$\because v = 0 , t = 0$

$\therefore 0 = c$

$\therefore v = -2t^2 + t$

$s = \int \frac{ds}{dt}\, dt = \int (-2t^2 + t)\, dt = \frac{-2}{3} t^3 + \frac{t^2}{2} + c$

$\because s = 5 , t = 0$

$\therefore 5 = c$

$\therefore s = \frac{-2t^3}{3} + \frac{t^2}{2} + 5$

$\because s = 2 , t = 1$

$2 = \frac{1}{3} - 2 - 5 + c$

$c = \frac{26}{3}$

$\therefore s = \frac{t^3}{3} - 2t^2 - 5t + \frac{26}{3}$

$v = \cos t + \sin t \quad , s = 1 , t = \frac{\pi}{2}$ (١٨)

$s = \int (\cos t + \sin t)\, dt$

$= \sin t - \cos t + c$

$\because s = 1 , t = \frac{\pi}{2}$

$\therefore 1 = \sin 90^\circ - \cos 90^\circ + c$

$\cancel{1} = \cancel{1} - 0 + c$

$c = 0$

$\therefore s = \sin t - \cos t$

$v = \frac{4}{(t-3)^2} \quad , s = 0 \quad , t = 0$ (١٩)

$s = \int \frac{ds}{dt}\, dt = \int \frac{4}{(t-3)^2}\, dt$

$s = \int 4(t-3)^{-2}\, dt$

$= 4\int (t-3)^{-2}\, dt$

$= \frac{4(t-3)^{-1}}{-1} + c = \frac{-4}{(t-3)} + c$

$\because s = 0 , t = 0$

$\therefore 0 = \frac{-4}{(0-3)} + c$

$c = \frac{-4}{3}$

$\therefore s = \frac{-4}{(t-3)} - \frac{4}{3}$

أوجد كلاً من سرعة الجسم وبعده إذا كان تسارعه بـ cm/s^2 في كل مما يأتي:

/ /

\# ملاحظة

الإزاحة (s) / والسرعة (v) / والعجلة (a)

عبارة عن كميات فيزيائية متجهة

أي من الممكن أن تكون موجبة أو سالبة

(17) $a = 1 - \cos t$, $s = 1$, $v = 0$, $t = 0$

$v = \int a\,dt = \int (1 - \cos t)\,dt$

$= t - \sin t + c$

$\because v = 0 , t = 0$

$\therefore 0 = 0 - \sin 0^\circ + c$

$c = 0$

$\therefore v = t - \sin t$

$s = \int v\,dt = \int (t - \sin t)\,dt$

$= \frac{t^2}{2} + \cos t + c$

$\because s = 1 , t = 0$

$\therefore \cancel{1 = \cos 0^\circ} + c$

$c = 0$

$\therefore s = \frac{t^2}{2} + \cos t$

(18) تسارع جسم $a = 3 + 4t$ أوجد سرعة الجسم عند أي لحظة علماً بأن سرعته الابتدائية $8\ cm/sec$ ثم أوجد المسافة المقطوعة عند $t=4$

$v = \int a\,dt = \int (3 + 4t)\,dt$

$= 3t + 2t^2 + c$

$\because v = 8 , t = 0$

$\therefore 8 = c$

$\therefore v = 2t^2 + 3t + 8$

$s = \int v\,dt = \int (2t^2 + 3t + 8)\,dt$

$s = \frac{2}{3}t^3 + \frac{3}{2}t^2 + 8t + c$

$\because t = 0 , s = 0$

$\therefore 0 = c$

$\therefore s = \frac{2}{3}t^3 + \frac{3}{2}t^2 + 8t$

$s\big|_{t=4} = \frac{2}{3}(64) + \frac{3}{2}(16) + 8(4)$

$= \frac{296}{3}$

/ /

حل اختبار الفصل 3 ص 120

أوجد كلاً من التكاملات الآتية

① $\int x^2(5x^2-8x+3)\,dx$

$\int(5x^4-8x^3+3x^2)\,dx$

$x^5-2x^4+x^3+c$

② $\int (x^2-8x+16)^{\frac{7}{2}}\,dx$

$\int\left[(x-4)^2\right]^{\frac{7}{2}}\,dx$

$=\int (x-4)^7\,dx = \frac{(x-4)^8}{8}+c$

③ $\int 9x\sqrt{x^2+12}\,dx$

$\int 9x(x^2+12)^{\frac{1}{2}}\,dx$

$\frac{9}{2}\int 2x(x^2+12)^{\frac{1}{2}}\,dx$

$\frac{9}{2}(x^2+12)^{\frac{3}{2}}\left(\frac{2}{3}\right)+c$

$=3\sqrt{(x^2+12)^3}+c$

④ $\int \frac{5}{x^2}\left(1+\frac{1}{x}\right)^3\,dx$

$-5\int -x^{-2}(1+x^{-1})^3\,dx$

$\frac{-5}{4}(1+x^{-1})^4+c$

⑤ $\int \frac{dx}{x^2+6x+9}$

$\int \frac{1}{(x+3)^2}\,dx = \int (x+3)^{-2}\,dx$

$=\frac{(x+3)^{-1}}{-1}+c = \frac{-1}{x+3}+c$

⑥ $\int \frac{1-\sin^2 x}{\cos^2 x}\,dx$

$\int \frac{\cancel{\cos^2 x}}{\cancel{\cos^2 x}}\,dx = \int dx$

$= x + c$

⑦ $\int(\tan^4 x-1)\,dx$

$\int \tan^4 x\,dx - \int dx$

$\int \tan^2 x(\sec^2 x-1)\,dx - \int dx$

$\int \tan^2 x\sec^2 x - \int \tan^2 x\,dx - \int dx$

$\int \tan^2 x\sec^2 x\,dx - \int(\sec^2 x-1)\,dx - \int dx$

$\int \tan^2 x\sec^2 x\,dx - \int \sec^2 x + \cancel{\int dx} - \cancel{\int dx}$

$\frac{\tan^3 x}{3} - \tan x + c$

⑧ $\int(\cos^4 x-\sin^4 x)\,dx$

$\int(\cos^2 x-\sin^2 x)\underbrace{(\cos^2 x+\sin^2 x)}_{1}\,dx$

$\int(\cos^2 x-\sin^2 x)\,dx$

$\int \cos^2 x\,dx - \int \sin^2 x\,dx$

$\because \cos 2x = 2\cos^2 x-1 \qquad \because \cos 2x = 1-2\sin^2 x$

$\frac{1}{2}(\cos 2x+1)=\cos^2 x \qquad 2\sin^2 x = 1-\cos 2x$

$\therefore \sin^2 x = \frac{1}{2}(1-\cos 2x)$

$\frac{1}{2}\int(\cos 2x+1)\,dx - \frac{1}{2}\int(1-\cos 2x)\,dx$

$\frac{1}{2}\left(\frac{\sin 2x}{2}+x\right) - \frac{1}{2}\left(x-\frac{\sin 2x}{2}\right)+c$

$\frac{\sin 2x}{4} + \cancel{\frac{x}{2}} - \cancel{\frac{x}{2}} + \frac{\sin 2x}{4} + c$

$\frac{\cancel{2}\sin 2x}{\cancel{4}\,2} + c = \frac{\sin 2x}{2}+c$

حل آخر $\int(\cos^2 x-\sin^2 x)\underbrace{(\cos^2 x+\sin^2 x)}_{1}\,dx$

$\int(\cos^2 x-\sin^2 x)\,dx$

$\int \cos 2x\,dx$

$\frac{\sin 2x}{2}+c$

⑨ $\int \frac{\cot x-\csc x}{\sin x}\,dx$

$\int(\cot x\csc x - \csc^2 x)\,dx$

$-\csc x + \cot x + c$

⑩ $\int \frac{\sin x}{\cos^2 x}\,dx$

$\int \tan x\sec x\,dx = \sec x + c$

$$\int (7x-3)(x+1)\,dx \quad (11)$$
$$\int (7x^2+7x-3x-3)\,dx$$
$$\int (7x^2+4x-3)\,dx$$
$$\frac{7}{3}x^3+2x^2-3x+C$$

$$\int \frac{(x-4)^2-9}{x-7}\,dx \quad (12)$$
$$\int \frac{x^2-8x+16-9}{x-7}\,dx$$
$$\int \frac{x^2-8x+7}{x-7}\,dx$$
$$\int \frac{\cancel{(x-7)}(x-1)}{\cancel{(x-7)}}\,dx$$
$$\int (x-1)\,dx$$
$$\frac{(x-1)^2}{2}+C$$

$$\int 12x(x^2+1)^5\,dx \quad (13)$$
$$6\int 2x(x^2+1)^5\,dx$$
$$\frac{\cancel{6}(x^2+1)^6}{\cancel{6}}+C=(x^2+1)^6+C$$

$$\int \frac{7x}{\sqrt[3]{3x^2-5}}\,dx \quad (14)$$
$$\int 7x(3x^2-5)^{-\frac{1}{3}}\,dx$$
$$\frac{7}{6}\int 6x(3x^2-5)^{-\frac{1}{3}}\,dx$$
$$\frac{7}{6}(3x^2-5)^{\frac{2}{3}}\left(\frac{3}{2}\right)+C$$
$$\frac{7}{4}\sqrt[3]{(3x^2-5)^2}\,dx$$

$$\int (\cot^3x+\cot x)\,dx \quad (15)$$
$$\int \cot x(\cot^2x+1)\,dx$$
$$-\int \cot x(-\csc^2x)\,dx$$
$$-\frac{\cot^2x}{2}+C$$

حل آخر

$$\int \cot x(\csc^2x-1)\,dx+\int \cot x\,dx$$
$$-\int \cot x(\csc^2x)\,dx\cancel{-\int \cot x\,dx+\int \cot x\,dx}$$
$$=-\frac{\cot^2x}{x}+C$$

$$\int \sec^3x\cos x\,dx \quad (16)$$
$$\int \sec^2x\,dx=\tan x+c$$

$$\int \frac{\sin 2x\cos x}{\sin x}\,dx \quad (17)$$
$$2\int \frac{\cancel{\sin x}\cos^2x}{\cancel{\sin x}}\,dx$$
$$2\int \cos^2x\,dx$$
$$\cancel{2}\int \frac{1}{\cancel{2}}(1+\cos 2x)\,dx$$
$$x+\frac{\sin 2x}{2}+c$$

$$\int \frac{2-\sin^2x}{\cos^2x} \quad (18)$$
$$\int \frac{1+(1-\sin^2x)}{\cos^2x}\,dx$$
$$\int \frac{1+\cos^2x}{\cos^2x}\,dx$$
$$\int (\sec^2x+1)\,dx$$
$$\tan x+x+c$$

حل آخر

$$2\int \sec^2x\,dx-\int \tan^2x\,dx$$
$$2\tan x+c-\int(\sec^2-1)\,dx$$
$$2\tan x+c-(\tan x-x)$$
$$2\tan x-\tan x+x+c=\tan x+x+c$$

/ /

(19) $\int \frac{\cos 2x}{\cos x - \sin x}\,dx$

$\int \frac{\cos^2 x - \sin^2 x}{\cos x - \sin x}\,dx$

$\int \frac{\cancel{(\cos x - \sin x)}(\cos x + \sin x)}{\cancel{(\cos x - \sin x)}}\,dx$

$\int (\cos x + \sin x)\,dx$

$= \sin x - \cos x + c$

(20) $\int 7 \sin 3t\,dt$

$\frac{7}{3}\int 3 \sin 3t\,dt$

$\frac{-7}{3}\cos 3t + c$

(21) إذا كانت $f(x) = \cos^2 x$, $g(x) = 2x$

فأوجد $\int [f \circ g](x)\,dx$

$[f \circ g](x) = f[g(x)]$

$= f[2x]$

$= \cos^2(2x)$

$h(x) = \int [f \circ g](x)\,dx$

$= \int \cos^2(2x)\,dx$

$\because \cos 2x = 2\cos^2 x - 1$

$\therefore \cos 4x = 2\cos^2(2x) - 1$

$\frac{1}{2}(\cos 4x + 1) = \cos^2(2x)$

$= \frac{1}{2}\int (\cos 4x + 1)\,dx$

$= \frac{1}{2}\left(\frac{\sin 4x}{4} + x\right) + c$

$= \frac{\sin 4x}{8} + \frac{x}{2} + c$

(22) دالة مشتقتها الأولى $\frac{dy}{dx} = 2x+1$ وقيمتها الصغرى المحلية تساوي (-1) أوجد هذه الدالة

$\frac{dy}{dx} = 0$

$2x + 1 = 0$

$2x = -1$

$x = \frac{-1}{2}$

∴ للدالة نقطة صغرى محلية $\left(\frac{-1}{2}, -1\right)$

$P(x) = \int \frac{dy}{dx}\,dx$

$= \int (2x+1)\,dx$

$= x^2 + x + c$

∵ المنحنى له قيمة صغرى في $\left(\frac{-1}{2}, -1\right)$

$\therefore -1 = \left(\frac{-1}{2}\right)^2 - \frac{1}{2} + c$

$-1 = \frac{-1}{4} + c$

$c = \frac{-3}{4}$

$\therefore P(x) = x^2 + x - \frac{3}{4}$

(23) ميل المماس هو $\frac{dy}{dx} = \sqrt{x}$ فأوجد معادلة المنحنى علماً بأنه يمر بـ $(4,3)$

$f(x) = \int f'(x)\,dx = \int \sqrt{x}\,dx = \int x^{\frac{1}{2}}\,dx$

$= \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} + c = \frac{2\sqrt{x^3}}{3} + c$

∵ المنحنى يمر بـ $(4,3)$

$\therefore 3 = \frac{2\sqrt{(4)^3}}{3} + c$

$3 = \frac{16}{3} + c$

$c = \frac{-7}{3}$

$\therefore f(x) = \frac{2\sqrt{x^3} - 7}{3}$

/ /

(24) ميل المماس لمنحنى يعطى بـ $\frac{dy}{dx} = 1 - \frac{1}{x^2}$ ، $x \neq 0$ فأوجد معادلة هذا المنحنى علماً بأنه يمر بـ $(1,1)$

$f(x) = \int f'(x)\,dx = \int \left(1 - \frac{1}{x^2}\right) dx$

$= \int (1 - x^{-2})\,dx$

$= x - \frac{x^{-1}}{-1} + c$

$= x + \frac{1}{x} + c$

∵ المنحنى يمر بـ $(1,1)$

$\therefore 1 = 1 + 1 + c$

$-1 = c$

$\therefore f(x) = x + \frac{1}{x} - 1$

(25) ميل المماس لمنحنى هو $f'(x) = \csc^2 x$ فأوجد معادلة المنحنى علماً بأنه يمر بـ $(\frac{\pi}{4}, 2)$

$f(x) = \int f'(x)dx = \int \csc^2 x\, dx$

$= -\cot x + c$

∵ المنحنى يمر بـ $(\frac{\pi}{4}, 2)$

$\therefore 2 = \frac{-1}{\tan\frac{\pi}{4}} + c$

$c = 3$

$\therefore f(x) = -\cot x + 3$

أوجد معادلة المنحنى بكل مما يأتي:

(26) $f'(x) = 6x^2 - 4x + k$, $(1,10)$, $(0,7)$

$F(x) = \int f'(x)\,dx = \int (6x^2 - 4x + K)\,dx$

$= 2x^3 - 2x^2 + Kx + c$

∵ المنحنى يمر بـ $(0,7)$

$\therefore 7 = c$

$\therefore F(x) = 2x^3 - 2x^2 + Kx + 7$

∵ المنحنى يمر بـ $(1,10)$

$\therefore 10 = \cancel{2} - \cancel{2} + K + 7$

$K = 3$

$\therefore F(x) = 2x^3 - 2x^2 + 3x + 7$

(27) $f'(x) = Kx^2 - 4$, $(0,0)$, $(3,6)$

$F(x) = \int f'(x)\,dx = \int (Kx^2 - 4)\,dx$

$= \frac{Kx^3}{3} - 4x + c$

∵ المنحنى يمر بـ $(0,0)$

$\therefore 0 = c$

$\therefore F(x) = \frac{Kx^3}{3} - 4x$

∵ المنحنى يمر بـ $(3,6)$

$\therefore 6 = \frac{(3)^{\cancel{3}\,2} K}{\cancel{3}} - 12$

$6 = 9K - 12$

$9K = 18$

$K = 2$

$\therefore F(x) = \frac{2}{3}x^3 - 4x$

(28) تسارع جسم هو $a = 12t - 8$ فأوجد سرعة وبعد الجسم بعد 5sec من لحظة بدء الحركة علماً بأن سرعة الجسم بعد 2sec كانت 10m/sec

$V = \int a\,dt = \int (12t - 8)\,dt = 6t^2 - 8t + c$

∵ $t = 2 \Rightarrow v = 10$

$\therefore 10 = 6(4) - 16 + c$

$c = 2$

$\therefore V = 6t^2 - 8t + 2$

$V|_{t=5} = 6(25) - 40 + 2 = 112\ m/s$

$S = \int v\,dt = \int (6t^2 - 8t + 2)\,dt = 2t^3 - 4t^2 + 2t + c$

∵ $t = 0 \Rightarrow S = 0$

$\therefore 0 = c \Rightarrow \therefore S = 2t^3 - 4t^2 + 2t$

$S|_{t=5} = 2(5)^3 - 4(5)^2 + 2(5)$

$= 160\,m$

/ /

(29) جسم تسارعه يُعطى بـ $a = 6t + 2$ إذا كان الجسم عند بدء قياس الزمن يبعد مسافة $4m$ عن نقطة ثابتة وكانت سرعته تساوي $11 m/sec$ عند الزمن $t = 1 sec$ فأوجد بعده عن النقطة الثابتة عند الزمن $t = 5$

$v = \int a\, dt = \int (6t+2)\, dt = 3t^2 + 2t + c$

$\because t = 1 \Rightarrow v = 11$

$\therefore 11 = 3 + 2 + c$

$6 = c$

$\therefore v = 3t^2 + 2t + 6$

$S = \int v\, dt = \int (3t^2 + 2t + 6)\, dt = t^3 + t^2 + 6t + c$

$\because t = 0 \Rightarrow S = 4$

$\therefore 4 = c$

$\therefore S(t) = t^3 + t^2 + 6t + 4$

$S(5) = (5)^3 + (5)^2 + 6(5) + 4$

$= 184 m$

(30) يتحرك جسم في خط مستقيم مبتدئاً من نقطة ثابتة O بحيث كانت سرعته $v = 6 - 6\cos t$ أوجد بعد الجسم عن النقطة الثابتة O بعد مضي زمن قدره $\frac{\pi}{3} sec$ من لحظة بدء الحركة

$S = \int v\, dt = \int (6 - 6\cos t)\, dt$

$= \int 6\, dt - 6 \int \cos t\, dt$

$= 6t - 6\sin t + c$

$\because t = 0 \Rightarrow S = 0$

$\therefore 0 = -6\sin 0 + c$

$c = 0$

$\therefore S(t) = 6t - 6\sin t$

$\therefore S\left(\frac{\pi}{3}\right) = 6\left(\frac{\pi}{3}\right) - 6\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)$

$= (2\pi - 3\sqrt{3})\, m$

$\simeq 1{,}087\, m$

خواص التكامل المحدد

① $\int_a^b [f(x) \pm g(x)]\,dx = \int_a^b f(x)\,dx \pm \int_a^b g(x)\,dx$

② $\int_a^b K f(x)\,dx = K \int_a^b f(x)\,dx$

حيث $K \in \mathbb{R}$

③ $\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx$

④ $\int_a^a f(x)\,dx = 0$

⑤ $\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$

حيث $c \in [a,b]$

مثال①: احسب قيمة $\int_{-1}^{2} (4x^3+3x^2+2x)\,dx$

$= x^4+x^3+x^2 \Big|_{-1}^{2}$

$= (28)-(1) = 27$

مثال②: إذا كانت الدالة $f(x) = x^2|x|$, $x \in [-2,2]$ فاحسب $\int_{-2}^{2} f(x)\,dx$

-2 ... $-x^2(x)$, $-x^3$ ... 0 ... $x^2(x)$, x^3 ... 2

$\int_{-2}^{2} f(x)\,dx = \int_{-2}^{0} f(x)\,dx + \int_{0}^{2} f(x)\,dx$

$= \int_{-2}^{0} -x^3\,dx + \int_{0}^{2} x^3\,dx$

$= \frac{-x^4}{4}\Big|_{-2}^{0} + \frac{x^4}{4}\Big|_{0}^{2}$

$= [(0)-(-4)] + [(4)-(0)]$

$= 4+4 = 8$

مثال③: احسب قيمة $\int_{-4}^{0} \frac{2x}{\sqrt{x^2+9}}\,dx$

$\int_{-4}^{0} 2x(x^2+9)^{-\frac{1}{2}}\,dx$

$= 2\sqrt{x^2+9}\Big|_{-4}^{0} = (6)-(10) = -4$

تدريب①: احسب قيمة كل تكامل مما يأتي

a) $\int_0^2 (2x+1)^5\,dx$

$\frac{1}{2}\int_0^2 2(2x+1)^5\,dx$

$\frac{1}{2}\cdot\frac{(2x+1)^6}{6}\Big|_0^2 = \frac{(2x+1)^6}{12}\Big|_0^2$

$\left(\frac{15625}{12}\right) - \left(\frac{1}{12}\right) = 1302$

b) $\int_0^3 \frac{2u+1}{\sqrt{u^2+u+1}}\,du$

$\int_0^3 (2u+1)(u^2+u+1)^{-\frac{1}{2}}\,du$

$= 2\sqrt{u^2+u+1}\Big|_0^3$

$= (2\sqrt{13}) - (2)$

$= -2 + 2\sqrt{13}$

/ /

تدريب: احسب قيمة كل من التكاملات الآتية

a) $\int_0^4 \cos\frac{x}{3}\,dx$

$$\int_0^4 \cos\tfrac{1}{3}x\,dx = 3\int_0^4 \tfrac{1}{3}\cos\tfrac{1}{3}x\,dx$$

$$= 3\left[\sin\frac{x}{3}\Big|_0^4\right]$$

$$= 3\left[\left(\sin\frac{4}{3}\right) - (0)\right]$$

$$= 3\sin\frac{4}{3} = 0{,}0698$$

b) $\int_0^{\frac{\pi}{3}} \sec x(\sec x + \sec x\tan x)\,dx$

$$\int_0^{\frac{\pi}{3}} (\sec^2 x + \sec^2 x\tan x)\,dx$$

$$\tan x + \frac{\tan^2 x}{2}\Big|_0^{\frac{\pi}{3}}$$

$$\left(\frac{3+2\sqrt{3}}{2}\right) - (0) = \frac{3+2\sqrt{3}}{2}$$

c) $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{1}{\sin^2 x\cos^2 x}\,dx$

$$\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \csc^2 x\sec^2 x\,dx$$

$$\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} (1+\tan^2 x)(\csc^2 x)\,dx$$

$$\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \left(\csc^2 x + \frac{\cancel{\sin^2 x}}{\cos^2 x}\cdot\frac{1}{\cancel{\sin^2 x}}\right)dx$$

$$\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} (\csc^2 x + \sec^2 x)\,dx$$

$$= -\cot x + \tan x\Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}$$

$$= \left(\frac{2\sqrt{3}}{3}\right) - (0)$$

$$= \frac{2\sqrt{3}}{3}$$

c) $\int_{-1}^{0} 1-|x|\,dx$

$$\xleftarrow{\quad 1-(-x) \quad}\; 0 \;\xrightarrow{\quad 1-x \quad}$$

$1+x$

$$\int_{-1}^{0} 1-|x|\,dx = \int_{-1}^{0}(1+x)\,dx$$

$$= x + \frac{x^2}{2}\Big|_{-1}^{0}$$

$$= (0) - \left(\frac{-1}{2}\right) = \frac{1}{2}$$

مثال 4: احسب قيمة $\int_0^{\pi} \sin^3 x\,dx$

$$\int_0^{\pi}\sin^3 x\,dx = \int_0^{\pi}\sin x(1-\cos^2 x)\,dx$$

$$= \int_0^{\pi}(\sin x - \sin x\cos^2 x)\,dx$$

$$= -\cos x + \frac{\cos^3 x}{3}\Big|_0^{\pi}$$

$$= \left(\frac{2}{3}\right) - \left(\frac{-2}{3}\right) = \frac{2}{3} + \frac{2}{3}$$

$$= \frac{4}{3}$$

مثال 5: أثبت أن $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{4}} \sqrt{\csc^2 x\cot^4 x}\,dx = 0$

$$\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{4}} \sqrt{\csc^4 x\cot^4 x}\,dx = -\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{4}} (-\csc^2 x)\cot^2 x\,dx$$

$$= -\frac{\cot^3 x}{3}\Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{4}}$$

$$= \left(\frac{-1}{3}\right) - \left(\frac{-1}{3}\right) = \frac{-1}{3} + \frac{1}{3}$$

$$= 0$$

$$= RHS$$

/ /

مثال ٦: احسب قيمة $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^5 x \, dx$

$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^3 (1-\sin^2 x) \, dx$

$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos^3 x - \cos^3 \sin^2 x) \, dx$

$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\cos x (1-\sin^2 x) - \cos x \sin^2 x (1-\sin^2 x) \right) dx$

$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\cos x - \cos x \sin^2 x - (\cos x \sin^2 x - \cos x \sin^4 x) \right) dx$

$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos x - \cos x \sin^2 x - \cos x \sin^2 x + \cos x \sin^4 x) \, dx$

$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos x - 2\cos x \sin^2 x + \cos x \sin^4 x) \, dx$

$= \sin x - \frac{2\sin^3 x}{3} + \frac{\sin^5 x}{5} \Big|_0^{\frac{\pi}{2}}$

$= \left(\frac{8}{15}\right) - (0) = \frac{8}{15}$

حل آخر

$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x (\cos^2 x)^2 \, dx$

$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x (1-\sin^2 x)^2$

$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x (1 - 2\sin^2 x + \sin^4 x) \, dx$

$\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos x - 2\sin^2 x \cos x + \sin^4 x \cos x) \, dx$

$= \sin x - \frac{2\sin^3 x}{3} + \frac{\sin^5 x}{5} \Big|_0^{\frac{\pi}{2}}$

$= \left(\frac{8}{15}\right) - (0) = \frac{8}{15}$

مثال ٧: احسب قيمة $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sin^4 x \, dx$

محلول بالكتاب ٩/١٤

$= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (\sin^2 x)^2 \, dx$

$\because \sin^2 x = \frac{1}{2}(1-\cos 2x)$

$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left[\frac{1}{2}(1-\cos 2x) \right]^2 dx$

$\frac{1}{4} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (1-\cos 2x)^2 \, dx$

$\frac{1}{4} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (1 - 2\cos 2x + \cos^2(2x)) \, dx$

$\because \cos^2 x = \frac{1}{2}(1+\cos 2x)$

$\therefore \cos^2(2x) = \frac{1}{2}(1+\cos 4x)$

$\therefore \frac{1}{4} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left[1 - 2\cos 2x + \frac{1}{2}(1+\cos 4x) \right] dx$

$\frac{1}{4} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} dx - \frac{1}{4} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} 2\cos 2x \, dx + \frac{1}{8} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (1+\cos 4x) \, dx$

$\frac{1}{4} x \Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} - \frac{1}{4} \sin 2x \Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} + \frac{1}{8} \left[x + \frac{\sin 4x}{4} \Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \right]$

$\left[\left(\frac{45}{2}\right) - \left(\frac{-45}{2}\right) \right] - \cancel{\left[(0) - (0) \right]} + \frac{1}{8} \left[(90) - (-90) \right]$

$45 + \frac{1}{8}(180) = \frac{135}{2} = \frac{3\pi}{8}$

$$\int_{-2}^{-1}\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)dx \quad ②$$

$$\int_{-2}^{-1}(x^2+x^{-2})\,dx=\frac{x^3}{3}+\frac{x^{-1}}{-1}\Big|_{-2}^{-1}$$

$$=\frac{x^3}{3}-\frac{1}{x}\Big|_{-2}^{-1}=\left(\frac{2}{3}\right)-\left(\frac{-13}{6}\right)=\frac{17}{6}$$

$$\int_0^4 x^2|x-2|\,dx \quad ③$$

$$\xleftarrow{\;-x^2(x-2)\;}\; 2 \;\xrightarrow{\;x^2(x-2)\;}$$

$$-x^3+2x^2 \qquad 2 \qquad x^3-2x^2$$

$$\int_0^4 x^2|x-2|\,dx=\int_0^2(-x^3+2x^2)\,dx+\int_2^4(x^3-2x^2)\,dx$$

$$=\frac{-x^4}{4}+\frac{2x^3}{3}\Big|_0^2+\frac{x^4}{4}-\frac{2x^3}{3}\Big|_2^4$$

$$=\left[\left(\frac{4}{3}\right)-(0)\right]+\left[\left(\frac{64}{3}\right)-\left(\frac{-4}{3}\right)\right]$$

$$=\frac{4}{3}+\frac{68}{3}=\frac{72}{3}=24$$

$$\int_0^2(|x-3|+3)\,dx \quad ④$$

$$\xleftarrow{\;-(x-3)+3\;}\; 3 \;\xrightarrow{\;\cancel{x-3+3}\;}$$

$$-x+3+3 \qquad 3 \qquad x$$

$$-x+6$$

$$\int_0^2(|x-3|+3)\,dx=\int_0^2(-x+6)\,dx$$

$$=\frac{-x^2}{2}+6x\Big|_0^2=(10)-(0)=10$$

$$\int_4^7\sqrt{8-x}\,dx \quad ⑤$$

$$-\int_4^7-(8-x)^{\frac{1}{2}}dx=\frac{-(8-x)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\Bigg|_4^7$$

$$=\frac{-2\sqrt{(8-x)^3}}{3}\Bigg|_4^7=\left(\frac{-2}{3}\right)-\left(\frac{-16}{3}\right)=\frac{14}{3}$$

سؤال 8: إذا كان $b\in[0,\frac{\pi}{2}]$

و $\int_{\frac{\pi}{6}}^{b}\sec^2x\tan x\,dx=\frac{4}{3}$ فجد قيمة b

$$\int_{\frac{\pi}{6}}^{b}\underset{f'}{\sec^2x}\;\underset{f}{\tan x}\,dx=\frac{4}{3}$$

$$\frac{\tan^2x}{2}\Big|_{\frac{\pi}{6}}^{b}=\frac{4}{3}$$

$$\left(\frac{\tan^2b}{2}\right)-\left(\frac{1}{6}\right)=\frac{4}{3}$$

$$\cancel{(2)}\frac{\tan^2b}{\cancel{2}}=\frac{3}{\cancel{2}}\cancel{(2)}$$

$$\sqrt{\tan^2b}=\sqrt{3}$$

$$\tan b=\sqrt{3}$$

$$b=\tan^{-1}(\sqrt{3})$$

$$b=60^\circ$$

$$b=\frac{\pi}{3}$$

تدريب 3 حل مختلف عن حل الكتاب

تمارين الكتاب ص 130

1 احسب قيمة كل من التكاملات الآتية

$$\int_0^1(8x^3-9x^2-1)\,dx \quad ①$$

$$=2x^4-3x^3-x\Big|_0^1$$

$$=(-2)-(0)=-2$$

/ /

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin x}{\cos^5 x}\,dx \quad (10)$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan x \sec^4 x\,dx$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \underset{f'}{\tan x \sec x}\ \underset{f}{(\sec x)}^3\,dx$$

$$= \frac{\sec^4 x}{4}\Bigg|_0^{\frac{\pi}{4}} = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$$

$$\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \csc^4 x\,dx \quad (11)$$

$$\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \csc^2 x(1+\cot^2 x)\,dx$$

$$\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} (\csc^2 x + \cot^2 x \csc^2 x)\,dx$$

$$= -\cot x - \frac{\cot^3 x}{3}\Bigg|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}$$

$$= 0 + \frac{4}{3} = \frac{4}{3}$$

$$\int_1^3 x(x^2-1)^4\,dx \quad (6)$$

$$\frac{1}{2}\int_1^3 2x(x^2-1)^4\,dx$$

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{(x^2-1)^5}{5}\Bigg|_1^3 = \frac{(x^2-1)^5}{10}\Bigg|_1^3$$

$$= \frac{16384}{5} - 0 = \frac{16384}{5}$$

$$\int_3^4 \frac{x}{\sqrt{25-x^2}}\,dx \quad (7)$$

$$\frac{-1}{2}\int_3^4 -2x(25-x^2)^{-\frac{1}{2}}\,dx$$

$$\frac{-1}{\cancel{2}}(\cancel{2})\sqrt{25-x^2}\Bigg|_3^4$$

$$= -\sqrt{25-x^2}\Bigg|_3^4$$

$$= -3 + 4 = 1$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^3 x \sec^2 x\,dx \quad (8)$$

$$= \frac{\tan^4 x}{4}\Bigg|_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{1}{4} - 0 = \frac{1}{4}$$

$$\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{\sin^4 x}\,dx \quad (9)$$

$$\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \cot x \csc^3 x\,dx$$

$$-\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \underset{f'}{-\cot x \csc x}\ \underset{f}{(\csc x)}^2\,dx$$

$$-\frac{\csc^3 x}{3}\Bigg|_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} = \frac{-1}{3} + \frac{8}{3} = \frac{7}{3}$$

/ /

تطبيقات هندسية على التكامل المحدود (3)

مساحة سطح المنطقة المحصورة بين منحنى $f(x)$ ومحور x في الفترة $[a,b]$ هو

$$A = \left| \int_a^b f(x)\, dx \right|$$

مثال ①: أوجد مساحة سطح المنطقة المحصورة بين محور x و $f(x) = x^2 - 4x$

لإيجاد نقاط تقاطع الدالة ← $f(x) = 0$ مع محور x "أصفار الدالة"

$$x^2 - 4x = 0$$

$$x(x-4) = 0$$

$$x = 0 \quad \text{or} \quad x = 4$$

$$A = \left| \int_a^b f(x)\, dx \right|$$

$$= \left| \int_0^4 (x^2 - 4x)\, dx \right|$$

$$= \left| \frac{x^3}{3} - 2x^2 \Big|_0^4 \right|$$

$$= \left| \frac{-32}{3} - 0 \right|$$

$= \frac{32}{3}$ وحدة مربعة

مثال ②: إذا كانت $f(x) = \sin x$ فأوجد مساحة المنطقة المحصورة بين المنحنى ومحور x في الفترة $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$

لإيجاد أصفار الدالة ← $f(x) = 0$

$$\sin x = 0$$

$$x = 0$$

$$A_1 = \left| \int_{-\frac{\pi}{2}}^{0} \sin x \, dx \right|$$

$$= \left| -\cos x \Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{0} \right|$$

$$= \left| -1 - 0 \right|$$

$= 1$ وحدة مربعة

$$A_2 = \left| \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x \, dx \right|$$

$$= \left| -\cos x \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} \right|$$

$$= \left| 0 + 1 \right|$$

$= 1$ وحدة مربعة

$A = A_1 + A_2 = 1 + 1 = 2$ وحدة مربعة كلية

/ /

مثال 3: أوجد A بين $f(x)=4x^3-12x^2+8x$ ومحور X

$f(x)=0$

$\frac{4x^3}{4}-\frac{12x^2}{4}+\frac{8}{4}x=\frac{0}{4}$

$x^3-3x^2+2x=0$

$x(x^2-3x+2)=0$

$x(x-2)(x-1)=0$

$x=0$ or $x=2$ or $x=1$

$A_1=\int_0^1(4x^3-12x^2+8x)\,dx$

$=x^4-4x^3+4x^2\Big|_0^1$

$=1-0=1$ وحدة مربعة

$A_2=\int_1^2(4x^3-12x^2+8x)\,dx$

$=x^4-4x^3+4x^2\Big|_1^2$

$=0-1=-1$

$=|-1|=1$ وحدة مربعة

$A_t=A_1+A_2=1+1=2$ وحدة مربعة

تمرين ①: أوجد المساحة بين كل دالة ومحور x

a) $f(x)=x^3-4x$

$f(x)=0$

$x^3-4x=0$

$x(x^2-4)=0$

$x(x-2)(x+2)=0$

$x=0$ or $x=2$ or $x=-2$

$A_1=\int_{-2}^{0}(x^3-4x)\,dx=\frac{x^4}{4}-2x^2\Big|_{-2}^{0}$

$=0+4=4$ وحدات مربعة

$A_2=\int_0^2(x^3-4x)\,dx=\frac{x^4}{4}-2x^2\Big|_0^2$

$=-4-0=-4$

$=|-4|=4$ وحدات مربعة

$A_t=A_1+A_2=4+4=8$ وحدات مربعة

b) $f(x)=\sin 2x \quad , \forall x\in\left[\frac{-\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$

$f(x)=0$

$\sin 2x=0$

$\frac{2}{2}\sin x\cos x=\frac{0}{2}$

$\sin x=0$ or $\cos x=0$

$x=0$ | $x=90=\frac{\pi}{2}$

$A_1=\frac{1}{2}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{0}2\sin 2x\,dx=\frac{-\cos 2x}{2}\Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{0}$

$=\frac{-1}{2}-\frac{1}{2}=-1$

$=|-1|=1$ وحدة مربعة

$A_2=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}2\sin 2x=\frac{-\cos 2x}{2}\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}$

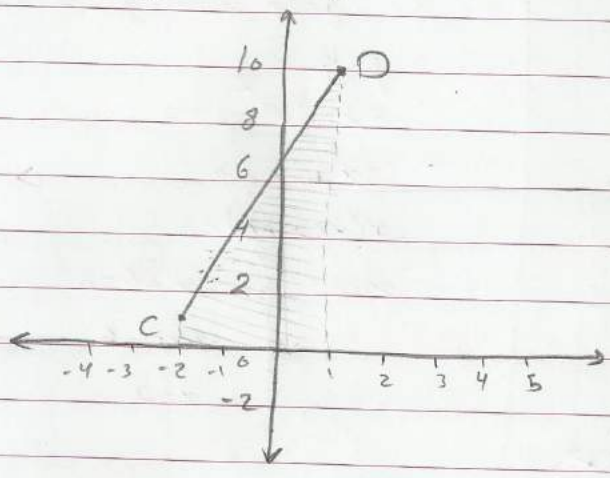
$=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=1$ وحدة مربعة

$A_t=A_1+A_2=1+1=2$ وحدة مربعة

/ /

مثال ٣ : أوجد المساحة المحصورة بين القطعة المستقيمة CD والمحور x حيث $C(-2,1)$ و $D(1,10)$

$x_1\ y_1$ ، $x_2\ y_2$



يمكن إيجاد المعادلة عن طريق

صيغة ميل ونقطة أو صيغة ميل ومقطع

صيغة ميل ونقطة:

$y - y_1 = m(x - x_1)$

$m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{10-1}{3} = 3$

$y - 10 = 3(x - 1)$

$y - 10 = 3x - 3$

$y = 3x + 7$

صيغة ميل ومقطع:

$y = mx + b$

نوجد الميل

$10 = 3(1) + b$

$b = 7$

$y = 3x + 7$ مثل الجواب

$A = \int_{-2}^{1} (3x + 7)\, dx$

$= \frac{3}{2}x^2 + 7x \Big|_{-2}^{1} = \frac{17}{2} + 8 = \frac{33}{2}$ وحدة مربعة

مثال ٤ : إذا كانت $f(x) = kx^2 + 1$ و $k > 0$ وكانت المساحة المحصورة بين منحنى $f(x)$ ومحور x في الفترة $[-3,1]$ تساوي 32 وحدة مربعة فأوجد k

$A = \left| \int_a^b f(x)\, dx \right|$

$\left| \int_{-3}^{1} (kx^2 + 1)\, dx \right| = 32$

$\left| \frac{kx^3}{3} + x \Big|_{-3}^{1} \right| = 32$

$\left| \left(\frac{1}{3}k + 1\right) - (-9k - 3) \right| = 32$

$\left| \frac{k}{3} + 1 + 9k + 3 \right| = 32$

$\left| \frac{28}{3}k + 4 \right| = 32$

$\frac{28}{3}k + 4 = 32$ or $\frac{28}{3}k + 4 = -32$

$\left(\frac{3}{28}\right)\frac{28}{3}k = 28\left(\frac{3}{28}\right)$

$k = 3$

$\frac{28}{3}k = -28$

$k = -28\left(\frac{3}{28}\right)$

$k = -3$

مرفوض لأن $k > 0$

ملاحظة

إذا كانت $\cos x = \sin y$

$\therefore x + y = \frac{\pi}{2} \Rightarrow$ من الزوايا المتتامة

$$A = \int_0^1 (x^2 - \sqrt{x})\,dx$$

$$= \int_0^1 (x^2 - x^{\frac{1}{2}})\,dx$$

$$= \frac{x^3}{3} - \frac{2x^{\frac{3}{2}}}{3} \Big|_0^1$$

$$= \frac{x^3}{3} - \frac{2}{3}\sqrt{x^3} \Big|_0^1$$

$$= \frac{-1}{3} - 0 = \frac{-1}{3}$$

$$= \left|\frac{-1}{3}\right| = \frac{1}{3} \text{ وحدة مربعة}$$

مثال: أوجد المساحة المحصورة بين منحنى $y = \cos x$ و $y = \sin x$ ومحورين في $[0, \frac{\pi}{4}]$ مقرباً الناتج لأقرب منزلة عشرية واحدة

$\cos x = \sin x$ or $x + x = \frac{\pi}{2}$

$\frac{\sin x}{\cos x} = 1$, $(\frac{1}{2}) 2x = \frac{\pi}{2}(\frac{1}{2})$

$x = \frac{\pi}{4}$

$\tan x = 1$

$x = \frac{\pi}{4}$

$$A = \int_0^{\frac{\pi}{4}} (\cos x - \sin x)\,dx$$

$$= \sin x + \cos x \Big|_0^{\frac{\pi}{4}}$$

$= (\sqrt{2} - 1)$ وحدة مربعة

$\simeq 0,4$ وحدة مربعة

مثال ⑥: أوجد مساحة المنطقة المحصورة بين المنحنى الدالة $y = 8x - 3x^2$ والمستقيم $y = 2x$

$y = y$

$8x - 3x^2 = 2x$

$-3x^2 + 6x = 0$

$x(-3x + 6) = 0$

$x = 0$ or $-3x + 6 = 0$

$-3x = -6$

$x = 2$

$$A = \int_0^2 [(8x - 3x^2) - (2x)]\,dx$$

$$= \int_0^2 (8x - 3x^2 - 2x)\,dx$$

$$= \int_0^2 (-3x^2 + 6x)\,dx$$

$$= -x^3 + 3x^2 \Big|_0^2$$

$= 4 - 0 = 4$ وحدة مربعة

مثال: أوجد مساحة المنطقة المحصورة بين $y = x^2$ ، $y = \sqrt{x}$

$y = y$

$(x^2)^2 = (\sqrt{x})^2$

$x^4 = x$

$x^4 - x = 0$

$x(x^3 - 1) = 0$

$x = 0$ | $x^3 = 1$

$x = 1$

مثال ٩: أوجد المساحة بين المنحنيين

$y = 6x - x^2$ و $y = x^2 - 2x$

$6x - x^2 = x^2 - 2x$

$\frac{8}{2}x - \frac{2}{2}x^2 = \frac{0}{2}$

$4x - x^2 = 0$

$x(4 - x) = 0$

$x = 0 \quad | \quad x = 4$

$$A = \int_0^4 \left[x^2 - 2x - (6x - x^2)\right] dx$$

$$= \int_0^4 (x^2 - 2x - 6x + x^2)\, dx$$

$$= \int_0^4 (2x^2 - 8x)\, dx$$

$$= \frac{2}{3}x^3 - 4x^2 \Big|_0^4$$

$$= \frac{-64}{3} - 0 = \frac{-64}{3}$$

$$= \left|\frac{-64}{3}\right| = \frac{64}{3}$$ وحدة مربعة

مثال ١٠: أوجد مساحة سطح المنطقة المحصورة بين منحنى الدالة $y = 2 - x^2$ والمستقيم $y = -x$

$2 - x^2 = -x$

$-x^2 + x + 2 = 0$

$(x - 2)(x + 1) = 0$

$x = 2 \quad | \quad x = -1$

$$A = \int_{-1}^{2} (2 - x^2 + x)\, dx$$

$$= 2x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} \Big|_{-1}^{2}$$

$$= \frac{10}{3} + \frac{7}{6} = \frac{9}{2}$$ وحدة مربعة

تدريب ٢: أوجد مساحة المنطقة المحصورة بين محور x ومنحنى الدالة $y = x^3 + 5x$ والمستقيم $x = 4$

$y = 0$

$x^3 + 5x = 0$

$x(x^2 + 5) = 0$

$x = 0 \quad | \quad x^2 + 5 = 0$

$x^2 = -5$ مرفوض

$$A = \int_0^4 (x^3 + 5x)\, dx$$

$$= \frac{x^4}{4} + \frac{5}{2}x^2 \Big|_0^4$$

$$= 104 - 0 = 104$$ وحدة مربعة

/ /

تمارين الكتاب ص 140

(١) أوجد A بين x و $y = x^2 - 2x$

$y = 0$

$x^2 - 2x = 0$

$x(x-2) = 0$

$x = 0 \mid x = 2$

$$A = \int_0^2 (x^2 - 2x)\,dx$$

$$= \frac{x^3}{3} - x^2 \Big|_0^2$$

$$= \frac{-4}{3} - 0 = \frac{-4}{3}$$

$$= \left|\frac{-4}{3}\right| = \frac{4}{3}$$ وحدة مربعة

(٢) أوجد A بين x والمستقيمين $x=1, x=3$ ومنحنى الدالة $y = x^2 + 1$

$y = 0$

$x^2 = -1$

مرفوض

$$A = \int_1^3 (x^2 + 1)\,dx$$

$$= \frac{x^3}{3} + x \Big|_1^3$$

$$= 12 - \frac{4}{3} = \frac{32}{3}$$ وحدة مربعة

(٣) أوجد A بين $y = \cos x$ ومحور x في $[0, \pi]$

$\cos x = 0$

$x = 90^\circ = \frac{\pi}{2}$

$$A_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x\,dx = \sin x \Big|_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$= 1 - 0 = 1$ وحدة مربعة

$$A_2 = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \cos x\,dx = \sin x \Big|_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}$$

$= 0 - 1 = -1$

$= |-1| = 1$ وحدة مربعة

$A_t = A_1 + A_2 = 1 + 1 = 2$ وحدة مربعة

(٤) أوجد A بين x و $y = \csc^2 x$ و $\forall x \in [\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3}]$

$y = 0$

$\csc^2 x = 0$

$\frac{1}{\sin^2 x} = \frac{0}{1}$

$1 \neq 0$

∴ لا توجد نقاط تقاطع مع محور x

$$A = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} y\,dx = \csc^2 x\,dx$$

$$= -\cot x \Big|_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}$$

$$= \frac{-\sqrt{3}}{3} + \sqrt{3} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$$ وحدة مربعة

/ /

⑤ أوجد A بين منحنى $y=3x^2$, المستقيم $y=6x$

$3x^2=6x$

$x^2=2x$

$x^2-2x=0$

$x=2 \; , x=0$

$A=\int_0^2 (3x^2-6x)\,dx$

$=x^3-3x^2\Big|_0^2$

$=-4-0=-4$

$=|-4|=4$ وحدات مساحة

⑥ أوجد A بين $y=x^2-4$, $y=4-x^2$

$4-x^2=x^2-4$

$\frac{8}{2}-\frac{2x^2}{2}=\frac{0}{2}$

$4-x^2=0$

$x^2=4$

$x=\pm 2$

$A=\int_{-2}^{2} (x^2-4-4+x^2)\,dx$

$=\int_{-2}^{2}(2x^2-8)\,dx$

$=\frac{2}{3}x^3-8x\Big|_{-2}^{2}$

$=\frac{-32}{3}-\frac{32}{3}=\frac{-64}{3}$

$=\left|\frac{-64}{3}\right|=\frac{64}{3}$ وحدة مساحة

⑦ أوجد A بين $y=\sin x$, $y=\cos x$, $\forall x\in\left[\frac{\pi}{4},\frac{5\pi}{4}\right]$

$\sin x=\cos x$

$x+x=\frac{\pi}{2}$

$\left(\frac{1}{2}\right)2x=\frac{\pi}{2}\left(\frac{1}{2}\right)$

$x=\frac{\pi}{4}$

$A=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{4}} (\sin x-\cos x)\,dx=-\cos x-\sin x\Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{4}}$

$=\sqrt{2}+\sqrt{2}=2\sqrt{2}$ وحدة مساحة

⑧ أوجد A بين $y=2x-x^2$, المستقيم $y=-3$

$\because y=y$

$2x-x^2=-3$

$-x^2+2x+3=0$

$(x-3)(x+1)=0$

$x=3$ or $x=-1$

$A=\int_{-1}^{3}(-x^2+2x+3)\,dx$

$=\frac{-x^3}{3}+x^2+3x\Big|_{-1}^{3}$

$=9+\frac{5}{3}=\frac{32}{3}$ وحدة مربعة

⑨ أوجد A بين منحنى $y=\sqrt[3]{x}$, والمستقيم $y=x$

$y=y$

$(\sqrt[3]{x})^3=(x)^3$

$x=x^3$

$x^3-x=0$

$x(x^2-1)=0$

$x=0$ | $x^2=1$, $x=\pm 1$

$A_1=\int_{-1}^{0}(x^{\frac{1}{3}}-x)\,dx$

$=\frac{3}{4}x^{\frac{4}{3}}-\frac{x^2}{2}\Big|_{-1}^{0}$

$=0-\frac{1}{4}=\frac{-1}{4}$

$=\left|\frac{-1}{4}\right|=\frac{1}{4}$ وحدة مساحة

$A_2=\int_{0}^{1}(x^{\frac{1}{3}}-x)\,dx$

$=\frac{3}{4}x^{\frac{4}{3}}-\frac{x^2}{2}\Big|_{0}^{1}$

$=\frac{1}{4}-0=\frac{1}{4}$ وحدة مساحة

$A_t=A_1+A_2=\frac{1}{4}+\frac{1}{4}=\frac{1}{2}$ وحدة مساحة

/ /

(١٠) إذا كانت المساحة المحصورة بين منحنى الدالة $f(x)=3x^2+4x+K$ ومحور x والمستقيمين $x=2$ و $x=3$ تساوي 25 وحدة مربعة فأوجد قيمة K

$$A=\left|\int_a^b f(x)\,dx\right|$$

$$25=\left|\int_2^3 (3x^2+4x+K)\,dx\right|$$

$$25=\left|x^3+2x^2+Kx\Big|_2^3\right|$$

$$25=\left|(45+3K)-(16+2K)\right|$$

$$25=\left|45+3K-16-2K\right|$$

$$25=\left|K+29\right|$$

$K+29=25$
$K=-4$

or

$K+29=-25$
$K=-54$

التكامل بالتعويض ص 141

التعويضات

$a+bx^2$ or $\sqrt{a+bx^2} \Rightarrow x=\sqrt{\frac{a}{b}}\tan\theta$

$a-bx^2$ or $\sqrt{a-bx^2} \Rightarrow x=\sqrt{\frac{a}{b}}\sin\theta$

bx^2-a or $\sqrt{bx^2-a} \Rightarrow x=\sqrt{\frac{a}{b}}\sec\theta$

مثال 1: احسب قيمة $\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\,dx$

$a=1 \qquad b=1$

$x=\sqrt{\frac{a}{b}}\sin\theta$

$x=\sqrt{\frac{1}{1}}\sin\theta$

$x=\sin\theta$

$dx=\cos\theta\,d\theta$

إيجاد حدود التكامل

$x=0$	$x=1$
$0=\sin\theta$	$\sin\theta=1$
$\theta=0$	$\theta=90^\circ=\frac{\pi}{2}$

$$\int_0^1\sqrt{1-x^2}\,dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{1-\sin^2\theta}\,\cos\theta\,d\theta$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{\cos^2\theta}\,\cos\theta\,d\theta$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2\theta\,d\theta$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1+\cos2\theta)\,d\theta$$

$$=\frac{1}{2}\left[\theta+\frac{\sin2\theta}{2}\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}\right]$$

$$=\frac{1}{2}\left[\frac{\pi}{2}-0\right]$$

$$=\frac{\pi}{4}$$

/ /

مثال 2: احسب قيمة $\int_{x_1=0}^{x_2=\frac{3}{4}}\frac{12}{\sqrt{9-4x^2}}\,dx$

$a=9 \qquad b=4$

$x=\sqrt{\frac{a}{b}}\sin\theta \Rightarrow x=\sqrt{\frac{9}{4}}\sin\theta$

$x=\frac{3}{2}\sin\theta$

$dx=\frac{3}{2}\cos\theta\,d\theta$

إيجاد حدود التكامل

$x_1=0$	$x_2=\frac{3}{4}$
$0=\frac{3}{2}\sin\theta$	$\left(\frac{2}{3}\right)\frac{3}{4}=\frac{3}{2}\sin\theta\left(\frac{2}{3}\right)$
$0=\sin\theta$	$\sin\theta=\frac{1}{2}$
$\theta=\sin^{-1}(0)$	$\theta=\sin^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)$
$=0$	$\theta=30^\circ=\frac{\pi}{6}$

$$\int_0^{\frac{3}{4}}f(x)\,dx=\int_0^{\frac{\pi}{6}}f(g(\theta))\cdot g'(\theta)\,d\theta \qquad \forall x\in[0,\tfrac{3}{4}],\ \forall\theta\in[0,\tfrac{\pi}{6}]$$

$$\int_0^{\frac{3}{4}}\frac{12}{\sqrt{9-4x^2}}\,dx=\int_0^{\frac{\pi}{6}}\frac{12}{\sqrt{9-\cancel{4}\left(\frac{9}{\cancel{4}}\sin^2\theta\right)}}\left(\frac{3}{2}\cos\theta\,d\theta\right)$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{6}}\frac{12}{\sqrt{9(1-\sin^2\theta)}}\left(\frac{3}{2}\cos\theta\,d\theta\right)$$

$$=4\int_0^{\frac{\pi}{6}}\frac{\frac{3}{2}\cancel{\cos\theta}\,d\theta}{\cancel{\cos\theta}}=6\int_0^{\frac{\pi}{6}}d\theta$$

$$=6\left[\theta\Big|_0^{\frac{\pi}{6}}\right]$$

$$=6\left[\frac{\pi}{6}-0\right]=\pi$$

سؤال ٤: احسب قيمة $\displaystyle\int_{x_1=\frac{\sqrt{3}}{2}}^{x_2=\frac{3\sqrt{3}}{2}} \frac{8x^2}{4x^2+9}\,dx$

$a=9 \quad b=4$

$x=\sqrt{\frac{9}{b}}\tan\theta=\sqrt{\frac{9}{4}}\tan\theta$

$x=\frac{3}{2}\tan\theta$

$dx=\frac{3}{2}\sec^2\theta\, d\theta$

إيجاد حدود التكامل

$x_1=\frac{\sqrt{3}}{2}$

$\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{3}{2}\tan\theta$

$\frac{\sqrt{3}}{3}=\tan\theta$

$\theta=\tan^{-1}\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$

$\theta=30^\circ=\frac{\pi}{6}$

$x_2=\frac{3\sqrt{3}}{2}$

$\frac{3\sqrt{3}}{2}=\frac{3}{2}\tan\theta$

$\sqrt{3}=\tan\theta$

$\theta=\tan^{-1}(\sqrt{3})$

$\theta=60^\circ=\frac{\pi}{3}$

$\forall x\in\left[\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{3\sqrt{3}}{2}\right],\ \forall\theta\in\left[\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{3}\right]$

$$\int_{\frac{\sqrt{3}}{2}}^{\frac{3\sqrt{3}}{2}} f(x)\,dx=\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} f(g(\theta))\,g'(\theta)\,d\theta$$

$$=\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{8\left(\frac{9}{4}\tan^2\theta\right)\left(\frac{3}{2}\sec^2\theta\, d\theta\right)}{4\left(\frac{9}{4}\tan^2\theta\right)+9}$$

$$=\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{27\tan^2\theta\sec^2\theta\, d\theta}{9(\tan^2\theta+1)}$$

$$=3\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}(\sec^2\theta-1)\,d\theta$$

$$=3\left[\tan\theta-\theta\Big|_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}\right]$$

$$=3\left[\left(\sqrt{3}-\frac{\pi}{3}\right)-\left(\frac{\sqrt{3}}{3}-\frac{\pi}{6}\right)\right]$$

$$=3\left[\frac{2\sqrt{3}}{3}-\frac{\pi}{6}\right]=2\sqrt{3}-\frac{\pi}{2}$$

سؤال ١: احسب قيمة $\displaystyle\int_{x_1=\sqrt{3}}^{x_2=3\sqrt{3}} \frac{3}{x^2+9}\,dx$

$a=9 \quad b=1$

$x=\sqrt{\frac{a}{b}}\tan\theta \Rightarrow x=\sqrt{\frac{9}{1}}\tan\theta$

$x=3\tan\theta$

$dx=3\sec^2\theta\, d\theta$

إيجاد حدود التكامل

$x_1=\sqrt{3}$

$\sqrt{3}=3\tan\theta$

$\frac{\sqrt{3}}{3}=\tan\theta$

$\theta=\tan^{-1}\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$

$\theta=30^\circ=\frac{\pi}{6}$

$x_2=3\sqrt{3}$

$3\sqrt{3}=3\tan\theta$

$\sqrt{3}=\tan\theta$

$\theta=\tan^{-1}(\sqrt{3})$

$\theta=60^\circ=\frac{\pi}{3}$

$\forall x\in[\sqrt{3},3\sqrt{3}],\ \forall\theta\in\left[\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{3}\right]$

$$\int_{\sqrt{3}}^{3\sqrt{3}} f(x)\,dx=\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} f(g(\theta))\cdot g'(\theta)\,d\theta$$

$$=\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{3}{9\tan^2\theta+9}\,(3\sec^2\theta\, d\theta)$$

$$=\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{\cancel{9}\cancel{\sec^2\theta}\, d\theta}{\cancel{9}\cancel{(\tan^2\theta+1)}}$$

$$=\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} d\theta=\theta\Big|_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}=\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{6}$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{4}} d\theta = \theta \Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{\pi}{4} - 0 = \frac{\pi}{4}$$

مثال 6: احسب قيمة $\displaystyle\int_{x_1=2}^{x_2=2\sqrt{2}} \frac{\sqrt{x^2-4}}{x}\, dx$

$a=4 \quad b=1 \quad x=\sqrt{\frac{a}{b}}\sec\theta$

$x=\sqrt{4}\sec\theta \Rightarrow x=2\sec\theta$

$dx=2\sec\theta\tan\theta\, d\theta$

إيجاد حدود التكامل

$x_1=2$	$x_2=2\sqrt{2}$
$2=2\sec\theta$	$2\sqrt{2}=2\sec\theta$
$1=\sec\theta$	$\sqrt{2}=\sec\theta$
$\cos\theta=1$	$\cos\theta=\frac{1}{\sqrt{2}}$
$\theta=\cos^{-1}(1)$	$\theta=\cos^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)=45^\circ=\frac{\pi}{4}$
$\theta=0$	

$\forall x\in[2,2\sqrt{2}],\ \forall\theta\in\left[0,\frac{\pi}{4}\right]$

$$\int_2^{2\sqrt{2}} f(x)\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} f(g(\theta))\cdot g'(\theta)\,d\theta$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sqrt{4\sec^2\theta-4}}{\cancel{2\sec\theta}} (\cancel{2\sec\theta}\tan\theta\, d\theta)$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sqrt{4(\sec^2\theta-1)}\ \tan\theta\, d\theta$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{4}} 2\tan^2\theta\, d\theta = 2\int_0^{\frac{\pi}{4}} (\sec^2\theta-1)\, d\theta$$

$$= 2\left[\tan\theta - \theta \Big|_0^{\frac{\pi}{4}}\right]$$

$$= 2\left[\left(1-\frac{\pi}{4}\right)-(0)\right] = 2-\frac{\pi}{2}$$

مثال 5: احسب قيمة $\displaystyle\int_{x_1=2}^{x_2=7} \frac{5}{x^2-4x+29}\, dx$

اكمال المربع $\displaystyle\int_2^7 \frac{5}{x^2-4x+29-4+4}\, dx$

$$\int_2^7 \frac{5}{(x-2)^2+25}\, dx$$

$a=25 \quad b=1$

$x=\sqrt{\frac{a}{b}}\tan\theta$

$x-2=\sqrt{25}\tan\theta$

$x=5\tan\theta+2$

$dx=5\sec^2\theta\, d\theta$

إيجاد حدود التكامل

$x_1=2$	$x_2=7$
$2=5\tan\theta+2$	$7=5\tan\theta+2$
$5\tan\theta=0$	$\tan\theta=1$
$\tan\theta=0$	$\theta=\tan^{-1}(1)$
$\theta=\tan^{-1}(0)$	$\theta=45^\circ=\frac{\pi}{4}$
$\theta=0$	

$\forall x\in[2,7],\ \forall\theta\in\left[0,\frac{\pi}{4}\right]$

$$\int_2^7 f(x)\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} f(g(\theta))\, g'(\theta)\,d\theta$$

$$= \int_2^7 \frac{5\, dx}{(x-2)^2+25} = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{5(5\sec^2\theta\, d\theta)}{(5\tan\theta)^2+25}$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cancel{25}\sec^2\theta\, d\theta}{\cancel{25}(\tan^2\theta+1)}$$

/ /

مثال 7: احسب قيمة $\displaystyle\int_{x_1=\frac{1}{\sqrt3}}^{x_2=1} \frac{8x^3}{\sqrt{4x^2-1}}\,dx$

$a=1 \quad b=4 \quad x=\sqrt{\frac{a}{b}}\sec\theta$

$x=\frac{1}{2}\sec\theta$

$dx=\frac{1}{2}\sec\theta\tan\theta\,d\theta$

إيجاد حدود التكامل

$x_1=\frac{1}{\sqrt3}$	$x_2=1$
$\frac{1}{\sqrt3}=\frac12\sec\theta$	$1=\frac12\sec\theta$
$\sec\theta=\frac{2}{\sqrt3}$	$\sec\theta=2$
$\cos\theta=\frac{\sqrt3}{2}$	$\cos\theta=\frac12$
$\theta=\cos^{-1}\left(\frac{\sqrt3}{2}\right)$	$\theta=\cos^{-1}\left(\frac12\right)$
$\theta=30^\circ=\frac{\pi}{6}$	$\theta=60^\circ=\frac{\pi}{3}$

$\forall x\in\left[\frac{1}{\sqrt3},1\right],\ \forall\theta\in\left[\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{3}\right]$

$$\int_{\frac{1}{\sqrt3}}^{1} f(x)\,dx=\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} f(g(\theta))\cdot g'(\theta)\,d\theta$$

$$=\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{\cancel{8}\left(\cancel{\tfrac18}\sec^3\theta\right)\left(\tfrac12\sec\theta\tan\theta\,d\theta\right)}{\sqrt{\cancel{4}\left(\cancel{\tfrac14}\sec^2\theta\right)-1}}$$

$$=\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{\frac12\sec^4\theta\,\cancel{\tan\theta}\,d\theta}{\cancel{\tan\theta}}$$

$$=\frac12\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \sec^2\theta\,(\tan^2\theta+1)\,d\theta$$

$$=\frac12\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} (\sec^2\theta\tan^2\theta+\sec^2\theta)\,d\theta$$

$$=\frac12\left[\frac{\tan^3\theta}{3}+\tan\theta\Bigg|_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}\right]$$

$$=\frac12\left[2\sqrt3-\frac{10\sqrt3}{27}\right]$$

$$=\frac12\left[\frac{44\sqrt3}{27}\right]=\frac{22\sqrt3}{27}$$

احسب قيمة كل من التكاملات الآتية

① $\displaystyle\int_{x_1=0}^{x_2=3}\sqrt{9-x^2}\,dx$

$a=9 \quad b=1 \quad x=\sqrt{\frac{a}{b}}\sin\theta$

$x=3\sin\theta \Rightarrow dx=3\cos\theta\,d\theta$

إيجاد حدود التكامل

$x_1=0$	$x_2=3$
$0=3\sin\theta$	$3=3\sin\theta$
$\sin\theta=0$	$\sin\theta=1$
$\theta=\sin^{-1}(0)$	$\theta=\sin^{-1}(1)$
$\theta=0$	$\theta=90^\circ=\frac{\pi}{2}$

$\forall x\in[0,3],\ \forall\theta\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$

$$\int_0^3 f(x)\,dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(g(\theta))\cdot g'(\theta)\,d\theta$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{9-9\sin^2\theta}\,(3\cos\theta\,d\theta)$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{9(\sin^2\theta-1)}\,(3\cos\theta\,d\theta)$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}9\cos^2\theta\,d\theta=\frac92\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1+\cos2\theta)\,d\theta$$

$$=\frac92\left[\theta+\frac{\sin2\theta}{2}\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}}\right]=\frac92\left[\frac{\pi}{2}-0\right]=\frac{9\pi}{4}$$

/ /

$$\int_{x_1=2}^{x_2=2\sqrt{3}} \frac{1}{\sqrt{16-x^2}}\,dx$$

$a=16 \quad b=1 \quad x=\sqrt{\frac{a}{b}}\sin\theta$

$x=4\sin\theta \rightarrow dx=4\cos\theta\,d\theta$

إيجاد حدود التكامل

$x_1=2$	$x_2=2\sqrt{3}$
$2=4\sin\theta$	$2\sqrt{3}=4\sin\theta$
$\frac{1}{2}=\sin\theta$	$\sin\theta=\frac{\sqrt{3}}{2}$
$\theta=\sin^{-1}(\frac{1}{2})$	$\theta=\sin^{-1}(\frac{\sqrt{3}}{2})$
$\theta=30^\circ=\frac{\pi}{6}$	$\theta=60^\circ=\frac{\pi}{3}$

$\forall x\in[2,2\sqrt{3}],\ \forall\theta\in[\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{3}]$

$$\int_2^{2\sqrt{3}} f(x)\,dx=\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} f(g(\theta))\cdot g'(\theta)\,d\theta$$

$$=\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{4\cos\theta\,d\theta}{\sqrt{16-16\sin^2\theta}}=\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{4\cos\theta\,d\theta}{\sqrt{16(1-\sin^2\theta)}}$$

$$=\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{\cancel{4\cos\theta}\,d\theta}{\cancel{4\cos\theta}}=\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} d\theta=\theta\Big|_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}$$

$$=\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{6}$$

$$\int_{x_1=1}^{x_2=\sqrt{2}} \frac{x^2}{\sqrt{4-x^2}}\,dx \quad (4)$$

$a=4 \quad b=1 \quad x=\sqrt{\frac{a}{b}}\sin\theta$

$x=2\sin\theta \rightarrow dx=2\cos\theta\,d\theta$

إيجاد حدود التكامل

$x_1=1$	$x_2=\sqrt{2}$
$1=2\sin\theta$	$\sqrt{2}=2\sin\theta$
$\sin\theta=\frac{1}{2}$	$\sin\theta=\frac{\sqrt{2}}{2}$
$\theta=\sin^{-1}(\frac{1}{2})$	$\theta=\sin^{-1}(\frac{\sqrt{2}}{2})$
$\theta=30^\circ=\frac{\pi}{6}$	$\theta=45^\circ=\frac{\pi}{4}$

$\forall x\in[1,\sqrt{2}],\ \forall\theta\in[\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{4}]$

$\leftarrow$

(3) (c)

$$\int_{x_1=\frac{1}{3}}^{x_2=\frac{2}{3}} \sqrt{4-9x^2}\,dx$$

$a=4 \quad b=9 \quad x=\sqrt{\frac{a}{b}}\sin\theta$

$x=\frac{2}{3}\sin\theta \rightarrow dx=\frac{2}{3}\cos\theta\,d\theta$

إيجاد حدود التكامل

$x_1=\frac{1}{3}$	$x_2=\frac{2}{3}$
$\frac{1}{3}=\frac{2}{3}\sin\theta$	$\frac{2}{3}=\frac{2}{3}\sin\theta$
$\sin\theta=\frac{1}{2}$	$\sin\theta=1$
$\theta=\sin^{-1}(\frac{1}{2})$	$\theta=\sin^{-1}(1)$
$\theta=30^\circ=\frac{\pi}{6}$	$\theta=90^\circ=\frac{\pi}{2}$

$\forall x\in[\frac{1}{3},\frac{2}{3}],\ \forall\theta\in[\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{2}]$

$$\int_{\frac{1}{3}}^{\frac{2}{3}} f(x)\,dx=\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} f(g(\theta))\,g'(\theta)\,d\theta$$

$$=\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{4-9(\frac{4}{9}\sin^2\theta)}\ (\frac{2}{3}\cos\theta\,d\theta)$$

$$=\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{4(1-\sin^2\theta)}\ (\frac{2}{3}\cos\theta\,d\theta)$$

$$=\frac{4}{3}\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2\theta\,d\theta=\frac{2}{3}\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}(1+\cos 2\theta)\,d\theta$$

$$=\frac{2}{3}\left[\theta+\frac{\sin 2\theta}{2}\Big|_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}\right]$$

$$=\frac{2}{3}\left[\left(\frac{\pi}{2}+0\right)-\left(\frac{\pi}{6}+\frac{\sqrt{3}}{4}\right)\right]$$

$$=\frac{2}{3}\left[\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{6}-\frac{\sqrt{3}}{4}\right]$$

$$=\frac{2}{3}\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\sqrt{3}}{4}\right)=\frac{2\pi}{9}-\frac{\sqrt{3}}{6}$$

/ /

$$\int_{x_1=\frac{1}{4}}^{x_2=\frac{1}{2}} \frac{\sqrt{1-4x^2}}{x^2}\,dx \quad (5)$$

$a=1 \quad b=4 \quad x=\sqrt{\frac{a}{b}}\,\sin\theta$

$x=\frac{1}{2}\sin\theta \Rightarrow dx=\frac{1}{2}\cos\theta\,d\theta$

$x_1=\frac{1}{4}$	$x_2=\frac{1}{2}$ إيجاد الحدود
$\frac{1}{4}=\frac{1}{2}\sin\theta$	$\frac{1}{2}=\frac{1}{2}\sin\theta$ التكامل
$\frac{1}{2}=\sin\theta$	$\sin\theta=1$
$\theta=\sin^{-1}(\frac{1}{2})$	$\theta=\sin^{-1}(1)$
$\theta=30^\circ=\frac{\pi}{6}$	$\theta=90^\circ=\frac{\pi}{2}$

$\forall x\in\left[\frac{1}{4},\frac{1}{2}\right], \forall\theta\in\left[\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{2}\right]$

$$\int_{0,25}^{0,5} f(x)\,dx=\int_{\pi/6}^{\pi/2} f(g(\theta))\cdot g'(\theta)\,d\theta$$

$$=\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sqrt{1-\cancel{4}(\frac{1}{\cancel{4}}\sin^2\theta)}\;(\frac{1}{2}\cos\theta\,d\theta)}{\frac{1}{4}\sin^2\theta}$$

$$=\int_{\pi/6}^{\pi/2}\frac{0,5\cos^2\theta}{0,25\sin^2\theta}\,d\theta=2\int_{\pi/6}^{\pi/2}\cot^2\theta\,d\theta$$

$$=2\int_{\pi/6}^{\pi/2}(\csc^2\theta-1)\,d\theta$$

$$=2\left[-\cot\theta-\theta\Big|_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}\right]$$

$$=2\left[\left(0-\frac{\pi}{2}\right)-\left(-\sqrt{3}-\frac{\pi}{6}\right)\right]$$

$$=2\left(-\frac{\pi}{2}+\sqrt{3}+\frac{\pi}{6}\right)$$

$$=2\left(\frac{-\pi}{3}+\sqrt{3}\right)=\frac{-2\pi}{3}+2\sqrt{3}$$

$$\int_{1}^{\sqrt{2}} f(x)\,dx=\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} f(g(\theta))\,g'(\theta)\,d\theta$$

$$=\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}}\frac{(4\sin^2\theta)(2\cos\theta\,d\theta)}{\sqrt{4-4\sin^2\theta}}$$

$$=\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}}\frac{(4\sin^2\theta)(2\cos\theta\,d\theta)}{\sqrt{4(1-\sin^2\theta)}}$$

$$=\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}}\frac{(4\sin^2\theta)(\cancel{2\cos\theta}\,d\theta)}{\cancel{2\cos\theta}}$$

$$=4\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}}\sin^2\theta\,d\theta=2\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}}(1-\cos2\theta)\,d\theta$$

$$=2\left[\theta-\frac{\sin2\theta}{2}\Big|_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}}\right]$$

$$=2\left[\left(\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}\right)-\left(\frac{\pi}{6}-\frac{\sqrt{3}}{4}\right)\right]$$

$$=2\left[\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}-\frac{\pi}{6}+\frac{\sqrt{3}}{4}\right]$$

$$=2\left(\frac{\pi}{12}+\frac{(-2+\sqrt{3})}{4}\right)$$

$$=\frac{\pi}{6}+\frac{(-2+\sqrt{3})}{2}$$

$x_1 = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{3}{2}\tan\theta$

$\tan\theta = \frac{\sqrt{3}}{3}$

$\theta = \tan^{-1}(\sqrt{3}/3)$

$\theta = 30^\circ = \frac{\pi}{6}$

حدود التكامل

$x_2 = \frac{3\sqrt{3}}{2}$

$\frac{3\sqrt{3}}{2} = \frac{3}{2}\tan\theta$

$\tan\theta = \sqrt{3}$

$\theta = \tan^{-1}(\sqrt{3})$

$\theta = 60^\circ = \frac{\pi}{3}$

$\forall x \in \left[\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{3\sqrt{3}}{2}\right], \forall \theta \in \left[\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3}\right]$

$$\int_{\sqrt{3}/2}^{3\sqrt{3}/2} f(x)\,dx = \int_{\pi/6}^{\pi/3} f(g(\theta))\, g'(\theta)\, d\theta$$

$$= \int_{\pi/6}^{\pi/3} \frac{\sqrt{4(\frac{9}{4}\tan^2\theta)+9}\;\left(\frac{3}{2}\sec^2\theta\, d\theta\right)}{\frac{81}{16}\tan^4\theta}$$

$$= \int_{\pi/6}^{\pi/3} \frac{\sqrt{9(\tan^2\theta+1)}\;\left(\frac{3}{2}\sec^2\theta\, d\theta\right)}{81/16\ \tan^4\theta}$$

$$= \int_{\pi/6}^{\pi/3} \frac{9/2\ \sec^3\theta\, d\theta}{81/16\ \tan^4\theta} = \frac{8}{9}\int_{\pi/6}^{\pi/3} \frac{\frac{1}{\cos^3\theta}}{\frac{\sin^4\theta}{\cos^4\theta}}\, d\theta$$

$$= \frac{8}{9}\int_{\pi/6}^{\pi/3} \frac{\cos\theta}{\sin^4\theta}\, d\theta = \frac{8}{9}\int_{\pi/6}^{\pi/3} \cot\theta\csc^3\theta\, d\theta$$

$$= \frac{-8}{9}\int_{\pi/6}^{\pi/3} -\cot\theta\csc\theta\,(\csc\theta)^2\, d\theta$$

$$= \frac{-8}{9}\left[\frac{\csc^3\theta}{3}\Big|_{\pi/6}^{\pi/3}\right]$$

$$= \frac{-8}{9}\left(\frac{8\sqrt{3}}{27} - \frac{8}{3}\right) = \frac{-8}{9}\left(\frac{-72+8\sqrt{3}}{27}\right)$$

$$= \frac{-8(-72+8\sqrt{3})}{243}$$

$$\int_0^{5/4} \frac{1}{16x^2+25}\, dx \quad (1)$$

$a = 25 \quad b = 16 \quad x = \sqrt{\frac{a}{b}}\tan\theta$

$x = \frac{5}{4}\tan\theta \Rightarrow dx = \frac{5}{4}\sec^2\theta\, d\theta$

$x_1 = 0$

$0 = \frac{5}{4}\tan\theta$

$\tan\theta = 0$

$\theta = \tan^{-1}(0)$

$\theta = 0$

حدود التكامل

$x_2 = \frac{5}{4}$

$\frac{5}{4} = \frac{5}{4}\tan\theta$

$\tan\theta = 1$

$\theta = \tan^{-1}(1)$

$\theta = 45^\circ = \frac{\pi}{4}$

$\forall x \in \left[0, \frac{5}{4}\right], \forall \theta \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right]$

$$\int_0^{5/4} f(x)\,dx = \int_0^{\pi/4} f(g(\theta))\cdot g'(\theta)\, d\theta$$

$$= \int_0^{\pi/4} \frac{\left(\frac{5}{4}\sec^2\theta\, d\theta\right)}{\cancel{16}\left(\frac{25}{\cancel{16}}\right)\tan^2\theta + 25}$$

$$= \int_0^{\pi/4} \frac{5/4\ \cancel{\sec^2\theta}\, d\theta}{25\,\cancel{(\tan^2\theta+1)}}$$

$$= \frac{1}{20}\int_0^{\pi/4} d\theta = \frac{1}{20}\left[\theta\Big|_0^{\pi/4}\right]$$

$$= \frac{1}{20}\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\pi}{80}$$

$$\int_{x_1 = \frac{\sqrt{3}}{2}}^{x_2 = \frac{3\sqrt{3}}{2}} \frac{\sqrt{4x^2+9}}{x^4}\, dx \quad (2)$$

$a = 9 \quad b = 4 \quad x = \sqrt{\frac{a}{b}}\tan\theta$

$x = \frac{3}{2}\tan\theta \Rightarrow dx = \frac{3}{2}\sec^2\theta\, d\theta$

/ /

$$\int_{x_1 = 2\sqrt{3}}^{x_2 = 6} \frac{1}{x\sqrt{x^2-9}}\, dx \quad (8)$$

$a = 9 \quad b = 1 \quad x = \sqrt{\frac{a}{b}}\sec\theta$

$x = 3\sec\theta \Rightarrow dx = 3\sec\theta\tan\theta\, d\theta$

إيجاد حدود التكامل

$x_1 = 2\sqrt{3}$	$x_2 = 6$
$2\sqrt{3} = 3\sec\theta$	$6 = 3\sec\theta$
$\sec\theta = \frac{2\sqrt{3}}{3}$	$\sec\theta = 2$
$\cos\theta = \frac{3}{2\sqrt{3}}$	$\cos\theta = \frac{1}{2}$
$\theta = \cos^{-1}\left(\frac{3}{2\sqrt{3}}\right)$	$\theta = \cos^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)$
$\theta = 30^\circ = \frac{\pi}{6}$	$\theta = 60^\circ = \frac{\pi}{3}$

$\forall x \in [2\sqrt{3}, 6], \forall \theta \in \left[\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3}\right]$

$$\int_{2\sqrt{3}}^{6} f(x)\, dx = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} f(g(\theta))\, g'(\theta)\, d\theta$$

$$= \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{3\sec\theta\tan\theta\, d\theta}{3\sec\theta\sqrt{9\sec^2\theta - 9}}$$

$$= \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{\tan\theta\, d\theta}{\sqrt{9(\sec^2\theta - 1)}} = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{\cancel{\tan\theta}\, d\theta}{3\cancel{\tan\theta}}$$

$$= \frac{1}{3}\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} d\theta = \frac{1}{3}\theta \Big|_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}$$

$$= \frac{1}{3}\left(\frac{\pi}{3}\right) - \frac{1}{3}\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\pi}{18}$$

$$\int_{x_1 = \frac{1}{3}}^{x_2 = \frac{2}{3}} x^3\sqrt{9x^2 - 1}\, dx \quad (9)$$

$a = 1 \quad b = 9 \quad x = \sqrt{\frac{a}{b}}\sec\theta$

$x = \frac{1}{3}\sec\theta \Rightarrow dx = \frac{1}{3}\sec\theta\tan\theta\, d\theta$

إيجاد حدود التكامل

$x_1 = \frac{1}{3}$	$x_2 = \frac{2}{3}$
$\frac{1}{3} = \frac{1}{3}\sec\theta$	$\frac{2}{3} = \frac{1}{3}\sec\theta$
$\sec\theta = 1$	$\sec\theta = 2$
$\cos\theta = 1$	$\cos\theta = \frac{1}{2}$
$\theta = \cos^{-1}(1)$	$\theta = \cos^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)$
$\theta = 0$	$\theta = 60^\circ = \frac{\pi}{3}$

$\forall x \in \left[\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right], \forall \theta \in \left[0, \frac{\pi}{3}\right]$

$$\int_{\frac{1}{3}}^{\frac{2}{3}} f(x)\, dx = \int_{0}^{\frac{\pi}{3}} f(g(\theta))\, g'(\theta)\, d\theta$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{1}{27}\sec^3\theta\sqrt{\cancel{9}\left(\frac{1}{\cancel{9}}\sec^2\theta\right) - 1}\left(\frac{1}{3}\sec\theta\tan\theta\, d\theta\right)$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{1}{81}\sec^4\theta\tan^2\theta\, d\theta$$

$$= \frac{1}{81}\int_0^{\frac{\pi}{3}} \sec^2\theta\tan^2\theta(1 + \tan^2\theta)\, d\theta$$

$$= \frac{1}{81}\int_0^{\frac{\pi}{3}} (\sec^2\theta\tan^2\theta + \sec^2\theta\tan^4\theta)\, d\theta$$

$$= \frac{1}{81}\left[\frac{\tan^3\theta}{3} + \frac{\tan^5\theta}{5}\Big|_0^{\frac{\pi}{3}}\right]$$

$$= \frac{1}{81}\left[\left(\sqrt{3} + \frac{9\sqrt{3}}{5}\right) - (0 + 0)\right]$$

$$= \frac{1}{81} \cdot \frac{14\sqrt{3}}{5} = \frac{14\sqrt{3}}{405}$$

/ /

حل اختبار الفصل الرابع ص 152

(1) $\int_{5}^{7} (x-5)^6\,dx$

$= \frac{(x-5)^7}{7}\Big|_5^7$

$= \left(\frac{128}{7}\right) - (0) = \frac{128}{7}$

(2) $\int_{1/\sqrt{2}}^{1} x\sqrt{1-x^2}\,dx$

$= \frac{-1}{2}\int_{1/\sqrt{3}}^{1} -2x(1-x^2)^{\frac{1}{2}}\,dx$

$= \frac{2}{3}(1-x^2)^{\frac{3}{2}}\Big|_{1/\sqrt{3}}^{1} = \frac{2\sqrt{(1-x^2)^3}}{3}\Big|_{\frac{1}{\sqrt{3}}}^{1}$

$= 0 - \frac{4\sqrt{6}}{27} = \frac{-4\sqrt{6}}{27}$

(3) $\int_{1}^{4} \frac{1}{x^2}\sqrt{1-\frac{1}{x}}\,dx$

$\int_{1}^{4} x^{-2}(1-x^{-1})^{\frac{1}{2}}\,dx$

$\frac{2}{3}(1-x^{-1})^{\frac{3}{2}}\Big|_1^4 = \frac{2}{3}\sqrt{\left(1-\frac{1}{x}\right)^3}\Big|_1^4$

$= \frac{\sqrt{3}}{4} - 0 = \frac{\sqrt{3}}{4}$

(5) $\int_{4}^{6} (2+|u-2|)\,du$

$2+[-(u-2)]$ $\quad$ $2+\cancel{u}-\cancel{2}$

$2+[-u+2]$ $\quad 2 \quad$ u

$4-u$

$\int_{4}^{6} (2+|u-2|)\,du = \int_{4}^{6} u\,du$

$= \frac{u^2}{2}\Big|_4^6 = 18-8 = 10$

(6) $\int_{-1}^{3} (z|z|)\,dz$

$z(-z)$ $\quad$ $z(z)$

$-z^2$ $\quad 0 \quad$ z^2

$\int_{-1}^{3} (z|z|)\,dz = \int_{-1}^{0} -z^2\,dz + \int_{0}^{3} z^2\,dz$

$= \frac{-z^3}{3}\Big|_{-1}^{0} + \frac{z^3}{3}\Big|_0^3 = \left(0-\frac{1}{3}\right) + (9-0)$

$= \frac{26}{3}$

(4) $\int_{-2}^{-1} \left(\frac{|x|}{x} - 3\right)dx$

$\frac{-x}{x} - 3$ $\quad$ $\frac{x}{x} - 3$

$-1-3=-4$ $\quad 0 \quad$ $1-3=-2$

$\int_{-2}^{-1} \left(\frac{|x|}{x} - 3\right)dx = \int_{-2}^{-1} -4\,dx = -4x\Big|_{-2}^{-1}$

$= 4-8 = -4$

(8) $\int_{\pi/4}^{\pi/3} \frac{27}{\tan^5 x \sin^2 x}\,dx$

$= \int_{\pi/4}^{\pi/3} 27\cot^5 x \csc^2 x\,dx$

$= -27\int_{\pi/4}^{\pi/3} (\cot x)^5(-\csc^2 x)\,dx$

$= -27\,\frac{\cot^6 x}{6}\Big|_{\pi/4}^{\pi/3} = \frac{-9}{2\tan^6 x}\Big|_{\pi/4}^{\pi/3}$

$= \frac{-1}{6} + \frac{9}{2} = \frac{13}{3}$

(9) $\int_{\pi/6}^{\pi/3} 2\tan u \sec^2 u\,du$

$= 2\int_{\pi/6}^{\pi/3} \tan u \sec^2 u\,du = \cancel{2}\,\frac{\tan^2 u}{\cancel{2}}\Big|_{\pi/6}^{\pi/3}$

$= 3 - \frac{1}{3} = \frac{8}{3}$

/ /

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{4\tan u}{1+\cos^2 u}\, du \quad (10)$$

« محذوفة »

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^3 x - \cos^3 x}{\sin x - \cos x}\, dx \quad (11)$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cancel{(\sin x - \cos x)}(\sin^2 x + \sin x \cos x + \cos^2 x)}{\cancel{(\sin x - \cos x)}}\, dx$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\underbrace{\sin^2 x + \sin x \cos x + \cos^2 x}_{1})\, dx$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 + \underset{f}{\sin x}\, \underset{f'}{\cos x})\, dx$$

$$= x + \frac{\sin^2 x}{2} \Big|_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$= \frac{181}{2} - 0 = \frac{181}{2}$$

$$\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin 4z}{\cos 2z}\, dz \quad (12)$$

$$= \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{2 \sin 2z \cancel{\cos 2z}}{\cancel{\cos 2z}}\, dz$$

$$= \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} 2 \sin 2z\, dz = -\cos 2z \Big|_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}$$

$$= 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$$

$$\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{1-\cos x} \quad (13)$$

$$= \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{(1+\cos x)\, dx}{(1-\cos x)(1+\cos x)}$$

$$= \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1+\cos x}{1-\cos^2 x}\, dx = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1+\cos x}{\sin^2 x}\, dx$$

$$= \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} (\csc^2 x + \cot x \csc x)\, dx$$

$$= -\cot x - \csc x \Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}$$

$$= -1 - (-1 - \sqrt{2}) = \cancel{-1} + \cancel{1} + \sqrt{2} = \sqrt{2}$$

ملاحظة: إذا كان لدينا أحد الحدود 90° ($\frac{\pi}{2}$) وراح نعوض فيه في tan أو cot يكون الناتج غير معرف لذلك نجزئ الدالة المثلثية إلى $\frac{\sin x}{\cos x}$ أو $\frac{\cos x}{\sin x}$ "في السؤال اعلاه جزأناها لـ $\frac{-\cos x}{\sin x} - \frac{1}{\sin x} \Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}$ لكي نتمكن من التعويض في الآلة"

(14) أثبت أن

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} (\cos^2 x - \sin^2 x)\, dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} 2 \sin x \cos x\, dx$$

الإثبات

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos 2x\, dx \overset{?}{=} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin 2x\, dx$$

$$\frac{\sin 2x}{2} \Big|_0^{\frac{\pi}{4}} \overset{?}{=} \frac{-\cos 2x}{2} \Big|_0^{\frac{\pi}{4}}$$

$$\frac{1}{2} - 0 \overset{?}{=} 0 + \frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{2} \overset{\checkmark}{=} \frac{1}{2}$$

$$\therefore \int_0^{\frac{\pi}{4}} (\cos^2 x - \sin^2 x)\, dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} 2 \sin x \cos x\, dx$$

/ /

$$\int_{b}^{-2} (f(x)-2)\,dx = 7$$

$$\int_{b}^{-2} f(x)\,dx - \int_{b}^{-2} 2\,dx = 7$$

$$-5 - \int_{b}^{-2} 2\,dx = 7$$

$$\int_{b}^{-2} 2\,dx = -12$$

$$2x \Big|_{b}^{-2} = -12$$

$$-4 - 2b = -12$$

$$8 = 2b$$

$$b = 4$$

(17) إذا كان $\int_{0}^{3} n(x+1)^{n-1}\,dx = 15$

ثابت

$$n \int_{0}^{3} (x+1)^{n-1}\,dx = 15$$

$$\cancel{(n)} \frac{(x+1)^n}{\cancel{n}} \Big|_{0}^{3} = 15$$

$$(x+1)^n \Big|_{0}^{3} = 15$$

$$4^n - 1^n = 15$$ (1 أس أي عدد = 1)

$$4^n = 16$$

$$\therefore 4^n = 4^2$$

$$\therefore \boxed{n = 2}$$

(2) $n \log 4 = \log 16$

$$n = \frac{\log 16}{\log 4}$$

$$n = \log_4 16 = 2$$

(15) إذا كان $\int_{0}^{b} \cos^2 u \sin u\,du = \frac{1}{3}$, $b \in [0, \pi]$

فأوجد قيمة b

$$-\int_{0}^{b} \cos^2 u\,(-\sin u)\,du = \frac{1}{3}$$

$$-\frac{\cos^3 x}{3} \Big|_{0}^{b} = \frac{1}{3}$$

$$\frac{-\cos^3 b}{3} - \frac{\cos^3(0)}{3} = \frac{1}{3}$$

$$\cancel{(3)} \frac{-\cos^3(b) - \cos^3(0)}{\cancel{3}} = \frac{1}{\cancel{3}}\cancel{(3)}$$

$$\frac{1}{-1}\left(\cos^3(b) - \cos^3(0)\right) = \frac{1}{-1}$$

$$\cos^3(b) - \cancel{1} = -\cancel{1}$$

$$\sqrt[3]{\cos^3 b} = \sqrt[3]{0}$$

$$\cos b = 0$$

$$b = \cos^{-1}(0) = 90^\circ = \frac{\pi}{2}$$

(16) $\int_{-2}^{b} f(x)\,dx = 5$, $\int_{b}^{-2} (f(x)-2)\,dx = 7$

فأوجد قيمة b

$$\because \int_{-2}^{b} f(x)\,dx = 5$$

$$\therefore \int_{b}^{-2} f(x)\,dx = -5$$

/ /

(18) أوجد مساحة سطح المنطقة المحصورة بين محور x ومنحنى $f(x)=\sqrt{x}$ في الفترة $[0,4]$

$f(x)=0$

$(\sqrt{x})^2=(0)^2$

$x=0$

$$A=\int_0^4 \sqrt{x}\,dx=\int_0^4 x^{\frac{1}{2}}\,dx$$

$$=\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\Big|_0^4=\frac{2\sqrt{x^3}}{3}\Big|_0^4$$

$$=\frac{16}{3}-0=\frac{16}{3}$$ وحدة مربعة

(19) أوجد مساحة سطح المنطقة المحصورة بين محور x ومنحنى الدالة $y=\cos 2x+\sin 2x$ في الفترة $[0,\frac{\pi}{4}]$

$y=0$

$\cos 2x+\sin 2x=0$

$\frac{\cos 2x}{\cos 2x}=\frac{-\sin 2x}{\cos 2x}$

$-\tan 2x=1$

$\tan 2x=-1$

$2x=\tan^{-1}(-1)$

$2x=\frac{-\pi}{4}$

$x=\frac{-\pi}{8}$

$$A=\int_0^{\frac{\pi}{4}}(\cos 2x+\sin 2x)\,dx=\frac{\sin 2x}{2}-\frac{\cos 2x}{2}\Big|_0^{\frac{\pi}{4}}$$

$$=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}$$

$=1$ وحدة مربعة

(20) أوجد مساحة سطح المنطقة المحصورة بين منحنى الدالة $y=x^2+4$ والمستقيم $2x-y+7=0$

$\because 2x-y+7=0$

$y=2x+7$

$\because y=y$

$\therefore 2x+7=x^2+4$

$x^2-2x-3=0$

$(x-3)(x+1)=0$

$x=3 \mid x=-1$

$$A=\int_{-1}^{3}(x^2+4-2x-7)\,dx$$

$$A=\int_{-1}^{3}(x^2-2x-3)\,dx$$

$$A=\frac{x^3}{3}-x^2-3x\Big|_{-1}^{3}$$

$$=-9-\frac{5}{3}=\frac{-32}{3}$$

$$A=\left|\frac{-32}{3}\right|=\frac{32}{3}$$ وحدة مربعة

(21) أوجد مساحة سطح المنطقة المحصورة بين منحنيي الدالتين $y=1+4x-x^2$, $y=x^2-6x+9$

$y=y$

$1+4x-x^2=x^2-6x+9$

$-2x^2+10x-8=0$

$(x-4)(x-1)=0$

$x=4 \mid x=1$

$$A=\int_1^4(x^2-6x+9-1-4x+x^2)\,dx$$

/ /

$$\int_{x_1=1}^{x_2=2} \frac{\sqrt{x^2-1}}{x}\,dx \quad (23)$$

$a=1 \quad b=1 \quad x=\sqrt{\frac{a}{b}}\sec\theta$

$x=\sec\theta \Rightarrow dx=\sec\theta\tan\theta\,d\theta$

إيجاد حدود التكامل

$x_1=1$	$x_2=2$
$1=\sec\theta$	$2=\sec\theta$
$\cos\theta=1$	$\cos\theta=\frac{1}{2}$
$\theta=\cos^{-1}(1)$	$\theta=\cos^{-1}(0{,}5)$
$\theta_1=0$	$\theta_2=60^\circ=\frac{\pi}{3}$

$\forall x\in[1,2]\ ,\ \forall\theta\in[0,\frac{\pi}{3}]$

$$\int_1^2 f(x)\,dx=\int_0^{\frac{\pi}{3}} f(g(\theta))\cdot g'(\theta)\,d\theta$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sqrt{\sec^2\theta-1}\,(\cancel{\sec\theta}\tan\theta\,d\theta)}{\cancel{\sec\theta}}$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{3}} \sqrt{\tan^2\theta}\,(\tan\theta\,d\theta)$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{3}} \tan^2\theta\,d\theta=\int_0^{\frac{\pi}{3}}(\sec^2\theta-1)\,d\theta$$

$$=\tan\theta-\theta\Big|_0^{\frac{\pi}{3}}$$

$$=\left(\sqrt{3}-\frac{\pi}{3}\right)-(0)=\sqrt{3}-\frac{\pi}{3}$$

$$\int_{x_1=0}^{x_2=1} \frac{1}{\sqrt{2-x^2}}\,dx \quad (24)$$

$a=2 \quad b=1 \quad x=\sqrt{\frac{a}{b}}\sin\theta$

$x=\sqrt{2}\sin\theta \Rightarrow dx=\sqrt{2}\cos\theta\,d\theta$

إيجاد حدود التكامل

$x_1=0$	$x_2=1$
$0=\sqrt{2}\sin\theta$	$1=\sqrt{2}\sin\theta$
$\sin\theta=0$	$\sin\theta=\frac{1}{\sqrt{2}}$
$\theta_1=0$	$\theta_2=45^\circ=\frac{\pi}{4}$

$$A=\int_1^4 (2x^2-10x+8)\,dx$$

$$A=\frac{2}{3}x^3-5x^2+8x\Big|_1^4$$

$$A=\frac{-16}{3}-\frac{11}{3}=-9$$

$A=|-9|=9$ وحدة مربعة

احسب قيمة كل من التكاملات الآتية

$$\int_{x_1=0}^{x_2=4} \frac{dx}{x^2+16} \quad (22)$$

$a=16 \quad b=1 \quad x=\sqrt{\frac{a}{b}}\tan\theta$

$x=4\tan\theta \Rightarrow dx=4\sec^2\theta\,d\theta$

إيجاد حدود التكامل

$x_1=0$	$x_2=4$
$0=4\tan\theta$	$4=4\tan\theta$
$\tan\theta=0$	$\tan\theta=1$
$\theta=\tan^{-1}(0)$	$\theta=\tan^{-1}(1)$
$\theta_1=0$	$\theta_2=45^\circ=\frac{\pi}{4}$

$\forall x\in[0,4]\ ,\ \forall\theta\in[0,\frac{\pi}{4}]$

$$\int_0^4 f(x)\,dx=\int_0^{\frac{\pi}{4}} f(g(\theta))\,g'(\theta)\,d\theta$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{4\sec^2\theta\,d\theta}{16\tan^2\theta+16}$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{4\cancel{\sec^2\theta}\,d\theta}{16\,\cancel{(\tan^2\theta+1)}}$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{4}\,d\theta=\frac{\theta}{4}\Big|_0^{\frac{\pi}{4}}=\frac{\pi}{16}-0=\frac{\pi}{16}$$

/ /

$$\int_{\sqrt2}^{\frac{2}{\sqrt3}} \frac{dx}{x^2\sqrt{x^2-1}} = -\int_{2/\sqrt3}^{\sqrt2} \frac{dx}{x^2\sqrt{x^2-1}}$$

$$= -\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sec\theta\tan\theta\, d\theta}{\sec^2\theta\sqrt{\sec^2\theta-1}}$$

$$= -\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{\tan\theta\, d\theta}{\sec\theta\sqrt{\tan^2\theta}} = -\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cancel{\tan\theta}\, d\theta}{\sec\theta\cancel{\tan\theta}}$$

$$\cancel{-\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \cos\theta = -\theta\Big|_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} = \frac{-\pi}{4}+\frac{\pi}{6} = \frac{-\pi}{12}}$$

$$= -\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \cos\theta\, d\theta = -\sin\theta\Big|_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}}$$

$$= \frac{-\sqrt2}{2} + \frac{1}{2} = \frac{-\sqrt2+1}{2}$$

$$\int_{x_1=0}^{x_2=5/2} \frac{x^2}{\sqrt{25-x^2}}\, dx \quad (26)$$

$a=25 \quad b=1 \quad x=\sqrt{\frac{a}{b}}\sin\theta$

$(x = 5\sin\theta) \Rightarrow (dx = 5\cos\theta\, d\theta)$

$x_1 = 0$	$x_2 = \frac{5}{2}$ إيجاد حدود التكامل
$0 = 5\sin\theta$	$\frac{5}{2} = 5\sin\theta$
$\sin\theta = 0$	$\sin\theta = \frac{1}{2}$
$\theta_1 = 0$	$\theta_2 = \frac{\pi}{6}$

$\forall x \in [0, \frac{5}{2}], \forall\theta \in [0, \frac{\pi}{6}]$

$$\int_0^{5/2} f(x)\,dx = \int_0^{\pi/6} f(g(\theta))\cdot g'(\theta)\,d\theta$$

$\forall x \in [0,1], \forall\theta \in [0, \frac{\pi}{4}]$

$$\int_0^1 f(x)\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} f(g(\theta))\, g'(\theta)\,d\theta$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sqrt2\cos\theta\,d\theta}{\sqrt{2-2\sin^2\theta}}$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sqrt2\cos\theta\,d\theta}{\sqrt{2(1-\sin^2\theta)}}$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sqrt2\cos\theta\,d\theta}{\sqrt{2\cos^2\theta}} = \int_0 \frac{\cancel{\sqrt2}\cos\theta\,d\theta}{\cos\theta\sqrt2}$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{4}} d\theta = \theta\Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{\pi}{4}$$

$$\int_{x_1=\sqrt2}^{x_2=2/\sqrt3} \frac{dx}{x^2\sqrt{x^2-1}} \quad (25)$$

$a=1 \quad b=1 \quad x=\sqrt{\frac{a}{b}}\sec\theta$

$(x = \sec\theta) \Rightarrow (dx = \sec\theta\tan\theta\,d\theta)$

$x_1 = \sqrt2$	$x_2 = \frac{2}{\sqrt3}$ إيجاد حدود التكامل
$\sqrt2 = \sec\theta$	$\sec\theta = \frac{2}{\sqrt3}$
$\cos\theta = \frac{1}{\sqrt2}$	$\cos\theta = \frac{\sqrt3}{2}$
$\theta_1 = \frac{\pi}{4}$	$\theta_2 = \frac{\pi}{6}$

$\cancel{\forall x \in [\sqrt2, \frac{2}{\sqrt3}], \forall\theta \in [\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{6}]}$

$\forall x \in [\frac{2}{\sqrt3}, \sqrt2], \forall\theta \in [\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}]$

$$\int_{\sqrt2}^{\frac{2}{\sqrt3}} f(x)\,dx = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\pi/6} f(g(\theta))\cdot g'(\theta)\,d\theta$$

/ /

$$\int_{x_1=0}^{x_2=1} \frac{x^3}{\sqrt{x^2+1}}\,dx \quad (27)$$

$a=1 \quad b=1 \quad x=\sqrt{\frac{a}{b}}\tan\theta$

$(x=\tan\theta) \Rightarrow (dx=\sec^2\theta\, d\theta)$

ايجاد حدود التكامل

$x_1=0$	$x_2=1$
$0=\tan\theta$	$1=\tan\theta$
$\theta=\tan^{-1}(0)$	$\theta=\tan^{-1}(1)$
$\theta=0$	$\theta=\frac{\pi}{4}$

$\forall x\in[0,1]\,,\ \forall\theta\in[0,\frac{\pi}{4}]$

$$\int_0^1 f(x)\,dx=\int_0^{\frac{\pi}{4}} f(g(\theta))\cdot g'(\theta)\,d\theta$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{(\tan^3\theta)(\sec^2\theta\, d\theta)}{\sqrt{\tan^2\theta+1}}$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sec^2\theta\tan^3\theta\, d\theta}{\sqrt{\sec^2\theta}}$$

$$=\int_0^{\pi/4} \frac{\sec^{\cancel{2}}\theta\tan^3\theta\, d\theta}{\cancel{\sec\theta}}$$

$$=\int_0^{\pi/4} \sec\theta\tan^3\theta\, d\theta$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sec\theta\tan\theta(\sec^2\theta-1)\,d\theta$$

$$=\int_0^{\pi/4} (\sec\theta\tan\theta(\sec^2\theta)-\sec\theta\tan\theta)\,d\theta$$

$$=\frac{\sec^3\theta}{3}-\sec\theta\Big|_0^{\frac{\pi}{4}}$$

$$=\frac{-\sqrt{2}}{3}+\frac{2}{3}=\frac{-\sqrt{2}+2}{3}$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{(25\sin^2\theta)(5\cos\theta\, d\theta)}{\sqrt{25-25\sin^2\theta}}$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{(25\sin^2\theta)(5\cos\theta\, d\theta)}{\sqrt{25(1-\sin^2\theta)}}$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{(25\sin^2\theta)(\cancel{5\cos\theta}\, d\theta)}{\cancel{5\cos\theta}}$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{6}} 25\sin^2\theta\, d\theta=\int_0^{\frac{\pi}{6}} 25(\tfrac{1}{2})(1-\cos 2\theta$$

$$=\frac{25}{2}\int_0^{\frac{\pi}{6}} (1-\cos 2\theta)\,d\theta$$

$$=\frac{25}{2}\left[\theta-\frac{\sin 2\theta}{2}\Big|_0^{\frac{\pi}{6}}\right]$$

$$=\frac{25}{2}\left[\left(\frac{\pi}{6}-\frac{\sqrt{3}}{4}\right)-0\right]$$

$$=\frac{25\pi}{12}-\frac{25\sqrt{3}\,(\frac{3}{2})}{8(\frac{3}{2})}$$

$$=\frac{25\pi}{12}-\frac{37{,}5\sqrt{3}}{12}$$

$$=\frac{25\pi-37{,}5\sqrt{3}}{12}$$

/ /

$$\int_{x_1=0}^{x_2=3} \frac{x^2}{x^2+9}\,dx \quad \text{3d}$$

$a=9 \quad b=1 \quad x=\sqrt{\frac{9}{b}}\tan\theta$

$x=3\tan\theta \Rightarrow dx=3\sec^2\theta\,d\theta$

$x_1=0$	$x_2=3$ [illegible]
$0=3\tan\theta$	$3=3\tan\theta$ [illegible]
$\tan\theta=0$	$\tan\theta=1$
$\theta=0$	$\theta=\frac{\pi}{4}$

$\forall x\in[0,3]\ ,\ \forall\theta\in[0,\frac{\pi}{4}]$

$$\int_0^3 f(x)\,dx=\int_0^{\frac{\pi}{4}} f(g(\theta))\cdot g'(\theta)\,d\theta$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{(9\tan^2\theta)(3\sec^2\theta\,d\theta)}{9\tan^2\theta+9}$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{(\cancel{9}\tan^2\theta)(3\cancel{\sec^2}\theta\,d\theta)}{\cancel{9}\cancel{(\tan^2\theta+1)}}$$

$$=3\int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^2\theta\,d\theta$$

$$=3\int_0^{\frac{\pi}{4}} (\sec^2\theta-1)\,d\theta$$

$$=3\left[\tan\theta-\theta\,\Big|_0^{\frac{\pi}{4}}\right]$$

$$=3\left(1-\frac{\pi}{4}\right)=3\left(\frac{4-\pi}{4}\right)=\frac{12-3\pi}{4}$$

إذا كانت $y = f^2(x^3+1)$ فأوجد $\frac{dy}{dx}$

$$y = \left[f(x^3+1)\right]^2$$

$$\frac{dy}{dx} = 2\left[f(x^3+1)\right]\left[f'(x^3+1)(3x^2)\right]$$

$$= 6x^2 f(x^3+1) f'(x^3+1)$$

(5) إذا كان $\frac{dx}{dy} = \frac{-2}{y}$ ، $\frac{dy}{dz} = 8$

فما قيمة $\frac{dz}{dx}$

$$\frac{dz}{dx} = \frac{dz}{dy} \cdot \frac{dy}{dx}$$

$$= \frac{1}{8} \cdot \frac{y}{-2} = \frac{-y}{16}$$

(6) إذا كانت $f(x) = x^a - 16ax$ و $f'(2) = 0$ و a عدد حقيقي لا يساوي صفراً فما قيمة a؟

$$f'(x) = a x^{a-1} - 16a$$

$$\therefore f'(2) = 0$$

$$\therefore a(2)^{a-1} - 16a = 0$$

$$\frac{\cancel{a}}{\cancel{a}}(2)^{a-1} = \frac{16\cancel{a}}{\cancel{a}}$$

$$(2)^{a-1} = 16$$

$$(2)^{a-1} = 2^4$$

$$a - 1 = 4$$

$$a = 5$$

حل آخر

$$a(2)^{a-1} - 16a = 0$$

$$\frac{\cancel{a}}{\cancel{a}}(2)^{a-1} = \frac{16\cancel{a}}{\cancel{a}}$$

$$(2)^{a-1} = 16$$

$$(a-1)\log 2 = \log 16$$

$$a = \log_2 16 + 1 = 5$$

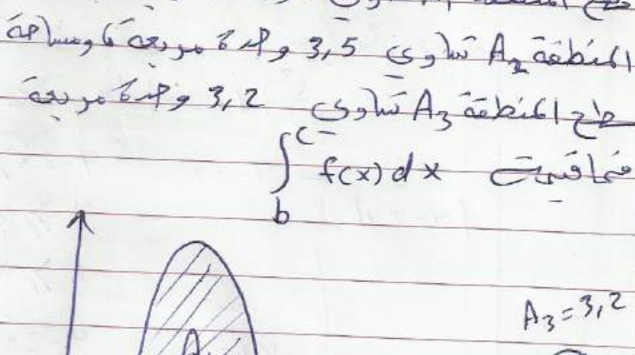
(7) ما ناتج $\int \sin\theta \cos\theta \, dx$

ثابت

$$\int \sin\theta \cos\theta \, dx = \sin\theta\cos\theta \int dx$$

$$= \sin\theta \cos\theta \, x + c$$

(8) اعتماداً على الشكل ادناه، إذا كانت مساحة طح المنطقة A_1 تساوي 3 وحدات مربعة ومساحة طح المنطقة A_2 تساوي 3,5 وحدة مربعة ومساحة طح المنطقة A_3 تساوي 3,2 وحدة مربعة فما قيمة $\int_b^c f(x)\,dx$



$A_2 = 3,5$

$$f(x) = A_3 - A_2 = 3,2 - 3,5 = -0,3$$

ولأن الفترة معكوسة (من الكبير للصغير) فنأخذ سالب كامل مشترك وعليه يكون الجواب $= -(-0,3) = 0,3$

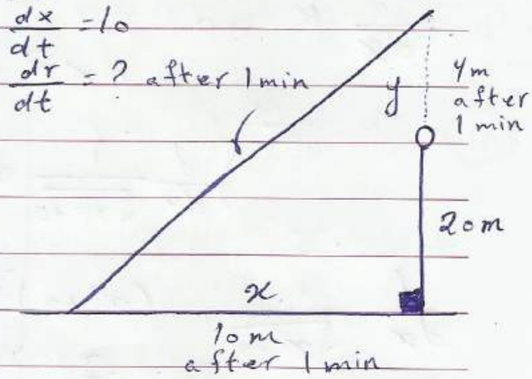
/ /

⑨ بالون على ارتفاع 20m عن سطح أرض أفقية مستوية، وفي لحظة ما بدأ يرتفع إلى أعلى بسرعة منتظمة مقدارها 4m/min وعند تلك اللحظة مرت من تحته عربة يدفعها رجل في خط مستقيم بسرعة منتظمة بلغت 10m/min أوجد معدل التغير في المسافة بين البالون والعربة بعد مرور دقيقة واحدة من تلك اللحظة.

$\frac{dy}{dt} = 4$

$\frac{dx}{dt} = 10$

$\frac{dr}{dt} = ?$ after 1min



$r = \sqrt{(24)^2 + (10)^2} = 26\text{ m}$
after 1 min

$\therefore x^2 + y^2 = r^2$

$\therefore x^2 + (20+y)^2 = r^2$

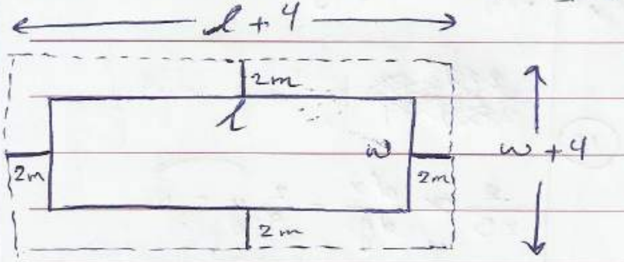
$\frac{2}{2} x \frac{dx}{dt} + \frac{2}{2}(20+y)\frac{dy}{dt} = \frac{2}{2} r \frac{dr}{dt}$

$x \frac{dx}{dt} + (20+y)\frac{dy}{dt} = r \frac{dr}{dt}$

$10(10) + (20+4)(4) = 26 \frac{dr}{dt}$

$\frac{dr}{dt} = \frac{98}{13}$ m/min

⑩ نراد إنشاء حديقة مستطيلة الشكل مساحتها $900m^2$ وإحاطتها من جميع الجوانب بطريق خارجي منتظم عرضه 2m أوجد أبعاد الحديقة التي تجعل المساحة الكلية للحديقة والطريق أقل ما يمكن.



$l w = 900$

$l = \frac{900}{w} = 900 w^{-1}$

$A = (l+4)(w+4)$

$A = \left(\frac{900}{w} + 4\right)(w+4)$

$A = 900 + 3600 w^{-1} + 4w + 16$

$A = 916 + 4w + 3600 w^{-1}$

$A' = 4 - 3600 w^{-2}$

$A' = 0$

$4 - \frac{3600}{w^2} = 0$

$4 = \frac{3600}{w^2}$

$w^2 = \frac{3600}{4}$

$w = 30m$

$l = \frac{900}{30} = 30m$

$A'' = 7200 w^{-3}$

$A''(30) = \frac{7200}{(30)^3} = \frac{4}{15} > 0 \Rightarrow$ قيمة صغرى

∴ تكون مساحة الحديقة والطريق أقل ما يمكن حينما $l = 30m$ و $w = 30m$

/ /

$$\therefore \lim_{x\to 0} \frac{1-2x^2+2\cos x+\cos^2 x}{x^2} \qquad (14)$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{(1-\cos x)^2-2x^2}{x^2}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x} \cdot \lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x} - \lim_{x\to 0} \frac{2\cancel{x^2}}{\cancel{x^2}}$$

$$= (0)(0) - 2 = -2$$

$$\frac{d}{dx} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sec^3\theta \tan^4\theta \, d\theta \qquad (15)$$

$$= \frac{d}{dx} K = 0$$

$K \in R$ حيث

$$\int \frac{d}{dx} \frac{1}{\sqrt{x^2+a}} \, dx \qquad (16)$$

$$\frac{d}{dx} \frac{1}{\sqrt{x^2+a}} = (x^2+a)^{-\frac{1}{2}}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-1}{\cancel{2}}(x^2+a)^{-\frac{3}{2}}(\cancel{2}x)$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = -x(x^2+a)^{-\frac{3}{2}}$$

$$\therefore \int \frac{d}{dx} \frac{1}{\sqrt{x^2+a}} \, dx = \int -x(x^2+a)^{-\frac{3}{2}}$$

$$= \frac{-1}{2} \int 2x(x^2+a)^{-\frac{3}{2}} \, dx$$

$$= \frac{-1}{\cancel{2}} \cdot \frac{(x^2+a)^{-\frac{1}{2}}}{\frac{-1}{\cancel{2}}} + C$$

$$= \frac{1}{\sqrt{x^2+a}} + C$$

إذا كان $\frac{x^2}{25} - \frac{y^2}{9} = 1$

فأثبت أن $\frac{dx}{dy} = \frac{25y}{9x}$

$$\frac{1}{25}x^2 - \frac{1}{9}y^2 = 1$$

$$\frac{2}{25}x\frac{dx}{dy} - \frac{2}{9}y = 0$$

$$\frac{2x}{25}\frac{dx}{dy} = \frac{2y}{9}$$

$$\frac{dx}{dy} = \frac{\cancel{2}y}{9} \cdot \frac{25}{\cancel{2}x}$$

$$\frac{dx}{dy} = \frac{25y}{9x}$$

$$\lim_{x\to -1} \frac{x^3 \tan(x+1)}{x+1} \qquad (12)$$

$$= \lim_{x\to -1} x^3 \cdot \lim_{x+1\to 0} \frac{\tan(x+1)}{x+1}$$

$$= (-1)^3(1) = -1$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^{\frac{3}{2}}} \qquad (13)$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{x^{\frac{2}{3}}(1-\cos x)}{x^{\frac{3}{2}} \cdot x^{\frac{2}{3}}}$$

$$= \lim_{x\to 0} \sqrt[3]{x^2} \cdot \lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x}$$

$$= \sqrt[3]{(0)^2}\,(0) = 0$$

$$\int x\sqrt[3]{\frac{3}{x^3}-\frac{2}{x^2}}\,dx \quad (19)$$

$$= \int \sqrt[3]{\frac{3\cancel{x^3}}{\cancel{x^3}}-\frac{2x^{\cancel{3}}}{\cancel{x^2}}}\,dx$$

$$= \int \sqrt[3]{3-2x}\,dx = \frac{-1}{2}\int -2(3-2x)^{\frac{1}{3}}\,dx$$

$$= \frac{-1}{2}(3-2x)^{\frac{4}{3}}\left(\frac{3}{4}\right)+c$$

$$= \frac{-3}{8}\sqrt[3]{(3-2x)^4}+c$$

حل آخر

$$= \int x\sqrt[3]{\frac{3}{x^3}-\frac{2(x)}{x^2(x)}}\,dx$$

$$= \int x\sqrt[3]{\frac{3-2x}{x^3}}\,dx = \int x\left[\frac{(3-2x)}{x^3}\right]^{\frac{1}{3}}dx$$

$$= \int \cancel{x}\cdot\frac{(3-2x)^{\frac{1}{3}}}{\cancel{(x^3)^{\frac{1}{3}}}}\,dx$$

$$= \frac{-1}{2}\int -2(3-2x)^{\frac{1}{3}}\,dx$$

$$= \frac{-1}{2}(3-2x)^{\frac{4}{3}}\left(\frac{3}{4}\right)+c$$

$$= \frac{-3}{8}\sqrt[3]{(3-2x)^4}+c$$

$$\int x\sqrt{x-1}\,dx \quad (١٧)$$

$$= \int (x-1+1)\sqrt{x-1}\,dx$$

$$= \int \left[(x-1)+1\right](x-1)^{\frac{1}{2}}\,dx$$

$$= \int \left[(x-1)^{\frac{3}{2}}+(x-1)^{\frac{1}{2}}\right]dx$$

$$= \frac{2}{5}(x-1)^{\frac{5}{2}}+\frac{2}{3}(x-1)^{\frac{3}{2}}+c$$

$$= \frac{2}{5}\sqrt{(x-1)^5}+\frac{2}{3}\sqrt{(x-1)^3}+c$$

$$\int \frac{x}{\sqrt{x-1}}\,dx \quad (١٨)$$

$$= \int \frac{(x-1)+1}{(x-1)^{\frac{1}{2}}}\,dx$$

$$= \int \left[(x-1)+1\right]\left[(x-1)^{\frac{-1}{2}}\right]dx$$

$$= \int \left[(x-1)^{\frac{1}{2}}+(x-1)^{\frac{-1}{2}}\right]dx$$

$$= \frac{2}{3}(x-1)^{\frac{3}{2}}+2(x-1)^{\frac{1}{2}}+c$$

$$= \frac{2}{3}\sqrt{(x-1)^3}+2\sqrt{(x-1)}+c$$

(20) $\int x^{14}\left(\frac{2}{x}+\frac{3}{x^2}\right)^7 dx$

$= \int x^{14}\left(\frac{2(x)}{x(x)}+\frac{3}{x^2}\right)^7 dx$

$= \int x^{14}\left(\frac{2x+3}{x^2}\right)^7 dx$

$= \int x^{14}\left(\frac{(2x+3)}{(x^2)}\right)^7 dx$

$= \int \cancel{x^{14}} \cdot \frac{(2x+3)^7}{\cancel{(x^2)^7}} dx$

$= \frac{1}{2}\int 2(2x+3)^7 dx$

$= \frac{1}{2}\ \frac{(2x+3)^8}{8} + c$

$= \frac{1}{16}(2x+3)^8 + c$

حل آخر ←

حل آخر

$= \int x^{14}\left(\frac{2}{x}+\frac{3}{x^2}\right)^7 dx$

$= \int \left[x^2\left(\frac{2}{x}+\frac{3}{x^2}\right)\right]^7 dx$

$= \int \left(\frac{2x^{\cancel{2}}}{\cancel{x}}+\frac{3\cancel{x^2}}{\cancel{x^2}}\right)^7 dx$

$= \frac{1}{2}\int 2(2x+3)^7 dx$

$= \frac{1}{2}\cdot\frac{(2x+3)^8}{8} + c$

$= \frac{(2x+3)^8}{16} + c$

إذا كان $x + y + \sin y = 7$ فأثبت أن

$\frac{d^2y}{dx^2}(1+\cos y) - \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 \sin y = 0$

$\because x + y + \sin y = 7$

$\therefore 1 + \frac{dy}{dx} + \cos y\left(\frac{dy}{dx}\right) = 0$

$\frac{d^2y}{dx^2} + \cos y\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right) + \frac{dy}{dx}\left(-\sin y\frac{dy}{dx}\right) = 0$

$\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{d^2y}{dx^2}\cos y - \sin y\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = 0$

$\frac{d^2y}{dx^2}\left(1+\cos y\right) - \sin y\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = 0$

$$\int \tan^6 x \, dx \quad (21)$$

$$= \int \tan^2 x \, (\tan^2 x)^2 \, dx = \int \tan^2 x \, (\sec^2 x - 1)^2 \, dx$$

$$= \int \tan^2 x \, (\sec^4 x - 2\sec^2 x + 1) \, dx = \int (\tan^2 x \sec^4 x - 2\sec^2 x \tan^2 x + \tan^2 x) \, dx$$

$$= \int \left[\tan^2 x \sec^2 x (\tan^2 x + 1) - 2\sec^2 x \tan^2 x + \tan^2 x \right] dx$$

$$= \int \left(\tan^4 x \sec^2 x + \underline{\tan^2 x \sec^2 x} - \underline{2\sec^2 x \tan^2 x} + \tan^2 x \right) dx$$

$$= \int \left(\underset{f}{\tan^4 x} \, \underset{f'}{\sec^2 x} - \underset{f'}{\sec^2 x} \, \underset{f}{\tan^2 x} + \sec^2 x - 1 \right) dx$$

$$= \frac{\tan^5 x}{5} - \frac{\tan^3 x}{3} + \tan x - x + C$$

$$\int \cos^4 x \, dx \quad (22)$$

$$= \int (\cos^2 x)^2 \, dx = \int \left[\tfrac{1}{2}(1 + \cos 2x) \right]^2 dx = \int \tfrac{1}{4} (1 + \cos 2x)^2 \, dx$$

$$= \frac{1}{4} \int \left[1 + 2\cos 2x + \cos^2(2x) \right] dx = \frac{1}{4} \int \left[1 + 2\cos 2x + \tfrac{1}{2}(1 + \cos 4x) \right] dx$$

$$\cos^2 x = \tfrac{1}{2}(1 + \cos 2x)$$
$$\cos^2(2x) = \tfrac{1}{2}(1 + \cos 4x)$$

$$= \frac{1}{4} \left[x + \sin 2x + \frac{1}{2}\left(x + \frac{\sin 4x}{4} \right) \right] + C$$

$$= \frac{1}{4} \left[x + \sin 2x + \frac{x}{2} + \frac{\sin 4x}{8} \right] + C$$

$$\int \csc^4 x \, dx \quad (23)$$

$$= \int \csc^2 x \, (1 + \cot^2 x) \, dx = \int (\csc^2 x + \csc^2 x \cot^2 x) \, dx$$

$$= -\cot x - \frac{\cot^3 x}{3} + C$$

/ /

$\int \sin^5 x \, dx$ (24)

$= \int \sin^3 x (1-\cos^2 x)\, dx = \int (\sin^3 x - \cos^2 x \sin^3 x)\, dx$

$= \int [\sin x (1-\cos^2 x) - \sin x \cos^2 x (1-\cos^2 x)]\, dx$

$= \int (\sin x - \underline{\sin x \cos^2 x} - \underline{\sin x \cos^2 x} + \sin x \cos^4 x]\, dx$

$= \int (\sin x - 2\sin x \cos^2 x + \sin x \cos^4 x)\, dx$

$= -\cos x + \frac{2\cos^3 x}{3} - \frac{\cos^5 x}{5} + C$

$\int \cos^5(10x) \sin^2(10x)\, dx$ (25)

$= \int \cos(10x) \sin^2(10x) \left(\cos^2(10x)\right)^2 dx$

$= \int \cos(10x) \sin^2(10x) \left(1-\sin^2(10x)\right)^2 dx$

$= \int \cos(10x) \sin^2(10x) \left(1 - 2\sin^2(10x) + \sin^4(10x)\right) dx$

$= \int \left(\cos(10x) \sin^2(10x) - 2\sin^4(10x)\cos(10x) + \sin^6(10x)\cos(10x)\right) dx$

$= \frac{1}{10}\underbrace{[10\cos(10x)]}_{f'}\underbrace{\sin^2(10x)}_{f}dx - \frac{2}{10}\int \underbrace{\sin^4(10x)}_{f}\underbrace{[10\cos(10x)]}_{f'}dx + \frac{1}{10}\int \underbrace{\sin^6(10x)}_{f}\underbrace{[10\cos(10x)]}_{f'}dx$

$= \frac{1}{10} \cdot \frac{\sin^3(10x)}{3} - \frac{1}{5} \cdot \frac{\sin^5(10x)}{5} + \frac{1}{10} \cdot \frac{\sin^7(10x)}{7} + C$

$= \frac{\sin^3(10x)}{30} - \frac{\sin^5(10x)}{25} + \frac{\sin^7(10x)}{70} + C$

(26) إذا علم أن معدل تغير ميل المماس $\frac{d^2y}{dx^2}=18x+4$ وأن ميل المماس عند النقطة $(1,1)$ يساوي 3 فأوجد قاعدة الدالة

$$\frac{dy}{dx}=\int \frac{d^2y}{dx^2}\,dx$$

$$=\int (18x+4)\,dx$$

$$=9x^2+4x+C$$

$$\therefore m=\left(\frac{dy}{dx}\right)_{(1,1)}=3$$

$$\therefore 9+4+C=3$$

$$13+C=3$$

$$C=-10$$

$$\therefore \frac{dy}{dx}=9x^2+4x-10$$

$$y=\int \frac{dy}{dx}\,dx$$

$$=\int (9x^2+4x-10)\,dx$$

$$=3x^3+2x^2-10x+C$$

$\therefore$ $(1,1)$ تحقق المعادلة

$$\therefore 1=3+2-10+C$$

$$1=-5+C$$

$$C=6$$

$$\therefore y=3x^2+2x^2-10x+6$$

(27) إذا كان $x^2+y^2=\sin(xy)+1$ فأوجد معادلة المماس $(0,1)$

$$2x+2yy'=\cos(xy)(xy'+y)$$

$$2x+2yy'=xy'\cos(xy)+y\cos(xy)$$

$$2yy'-xy'\cos(xy)=y\cos(xy)-2x$$

$$y'=\frac{y\cos(xy)-2x}{2y-x}$$

$$y'=m=\left(\frac{dy}{dx}\right)_{(0,1)}=\frac{\cos(0)}{2}=\frac{1}{2}$$

معادلة المماس

$$y-y_1=m(x-x_1)$$

$$y-1=\frac{1}{2}(x)$$

$$2y-2=x$$

$$x-2y+2=0$$

حل آخر

$$2x+2yy'=\cos(xy)(xy'+y)$$

$$\cancel{2(0)}+2(1)y'=\cos(0)(0y'+1)$$

$$2y'=(1)(1)$$

$$y'=\frac{1}{2}=m$$

معادلة المماس

$$y-y_1=m(x-x_1)$$

$$y-1=\frac{1}{2}(x)$$

$$2y-2=x$$

$$x-2y+2=0$$