KINGDOM OF BAHRAIN

Ministry of Education

مملكة البحرين

وزارة التربية والتعليم

ريض ٣٦٦

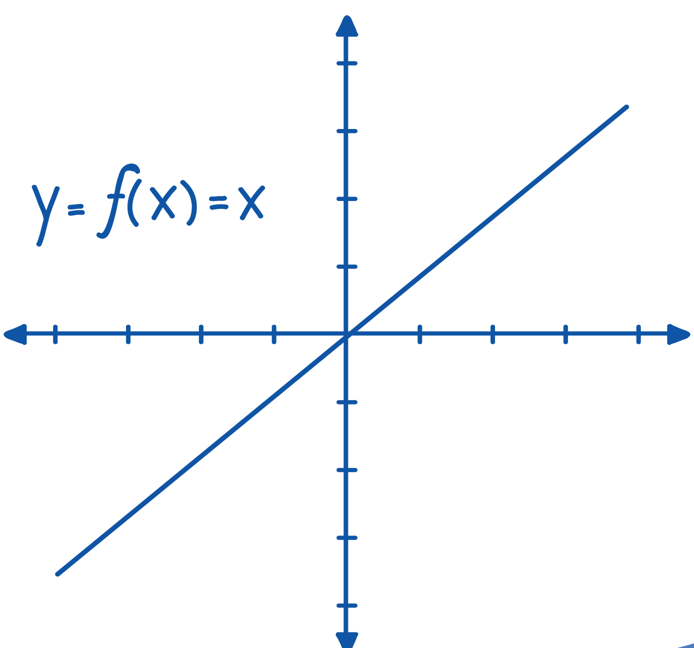
الرياضيات 6

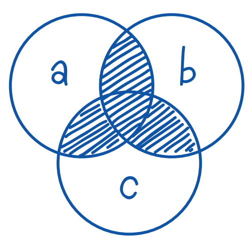
دليل المعلم

للمرحلة الثانوية

$y = f(x) = x$

π





2030
البحرين
BAHRAIN

ريض ٣٦٦

قررت وزارة التربية والتعليم بمملكة البحرين تدريس هذا الكتاب بمدارسها الثانوية

الرياضيات ٦

للمرحلة الثانوية

دليل المعلم

إعداد

وحدة مناهج الرياضيات للتعليم الثانوي

بإدارة سياسات وتطوير المناهج

حضرة صاحب الجلالة الملك حمد بن عيسى آل خليفة
ملك مملكة البحرين المعظم

الفصل 1

مخطط الفصل

الخطة الزمنية		
التدريس	المراجعة والتقييم	المجموع
(9) حصص	حصتان	(11) حصة

الدرس		الأهداف	المفردات الأساسية
الرمز	1 – 1	• ايجاد مشتقة الدالة المركبة باستعمال قاعدة التسلسل . • ايجاد مشتقة العلاقات الضمنية.	تركيب دالتين - الدالة المركبة – الدالة الضمنية – الاشتقاق الضمني
العنوان	**تركيب دالتين**		
عدد الحصص	(4) حصص		
الرمز	1 – 2	• ايجاد مشتقة الدوال المثلثية باستعمال قواعد الاشتقاق.	الدوال المثلثية
العنوان	**مشتقات الدوال المثلثية**		
عدد الحصص	(3) حصص		
الرمز	1 – 3	• إيجاد قاعدة دالة عُلمت مشتقتها الأولى ونقطة يمر بها منحناها باستعمال التكامل غير المحدد. • إيجاد السرعة والمسافة باستعمال التكامل غير المحدد.	المشتقة النونية
العنوان	**المشتقات العليا**		
عدد الحصص	(2) حصص		

الدرس (1-1) تركيب دالتين

تمارين (1-1)

الإجابات النهائية

(1) 6

(2) 1

(3) $\sqrt{3}$

(4.a) $15(7+3x)^4$

(4.b) $7(x^3+3x^2+2)^6(3x^2+6x)$

(4.c) $\dfrac{9}{16}$

(4.d) 292820

(4.e) $2(x-1)^3(x+1)^5(5x-1)$

(4.f) $\dfrac{3x^2+2x}{(x^3+x^2)^2}=\dfrac{3x+2}{x^3(x^2+2x+1)}$

(4.g) $\dfrac{8x^7}{(x+1)^9}$

(5) إثبات

(6) إثبات

(7) إثبات

(8) -31

(9) $\dfrac{4x-6}{3\sqrt[3]{x^2-3x-4}}$

(10) $\dfrac{2\sqrt{5}}{9\sqrt[3]{3}}$

(11.a) $-\dfrac{y^2}{x^2}$

(11.b) $-\left(\dfrac{y^2-y}{x+4y^2}\right)$

(11.c) $-\dfrac{y^2+2yx}{2xy+x^2}$

(11.d) $\dfrac{12x\sqrt{xy}-y}{2\sqrt{xy}+x}$

(12) $(-5,2),(1,4)$

(13) 1

(14) إثبات

(15) إثبات

<u>خطوات الحل لبعض التمارين</u>

$(2)\ if\ f(x) = \sqrt[3]{x}, \quad g(x) = x^3 \qquad , find\ [f \circ g]'(x)$

$\because [f \circ g]'(x) = f'[g(x)] \cdot g'(x)$

$$f'(x) = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}} \qquad , g'(x) = 3x^2$$

$$\therefore [f \circ g]'(x) = f'[g(x)] \cdot g'(x) = \frac{1}{3\sqrt[3]{(x^3)^2}} \cdot 3x^2$$

$$= \frac{1}{3x^2} \cdot 3x^2 = 1$$

---

(5)

$\because y = (1 - 2x + x^2)^8$

$= [(1-x)^2]^8 \Longrightarrow \quad y = (1-x)^{16}$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = 16(1-x)^{15}(-1)$$

$= -16(1-x)^{15}$

بالتعويض عن قيمة كل من $y , \frac{dy}{dx}$ في الطرف الأيسر من المعادلة

$$\frac{dy}{dx}(1-x) + 16y = -16(1-x)^{15}(1-x) + 16(1-x)^{16}$$

$= -16(1-x)^{16} + 16(1-x)^{16}$

$= 0$ وهو المطلوب اثباته

(7)

$$\frac{dy}{dz} = 2z - 7 \qquad , \qquad \frac{dz}{dx} = 3x^2$$

$$\because \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dz} \cdot \frac{dz}{dx}$$

$\therefore \frac{dy}{dx} = (2z-7) \cdot (3x^2)$, $z = x^3 - 1$ بالتعويض عن قيمة

$$= (2x^3 - 9) \cdot (3x^2)$$

$$= 6x^5 - 27x^2$$

بالتعويض عن قيمة كل من $\frac{dy}{dx}, \frac{dz}{dx}$ في الطرف الأيسر من المعادلة

$$\frac{dy}{dx} + 9\frac{dz}{dx} - 6x^5 = 6x^5 - 27x^2 + 9(3x^2) - 6x^5$$

$= 0$ وهو المطلوب اثباته

----

(15)

$$2y\frac{dy}{dx} = 2ax \qquad , \qquad \therefore \frac{dy}{dx} = \frac{ax}{y}$$

بالتعويض في الطرف الأيسر من المعادلة

$$\frac{y^2}{x^2}\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 - xy\left(\frac{dy}{dx}\right) + y^2 = \frac{y^2}{x^2}\left(\frac{ax}{y}\right)^2 - xy\left(\frac{ax}{y}\right) + y^2$$

$$= \frac{y^2}{x^2} \cdot \frac{a^2x^2}{y^2} - xy\left(\frac{ax}{y}\right) + y^2$$

$$= a^2 - ax^2 + ax^2 - a^2$$

$= 0$ وهو المطلوب اثباته

الدرس (2-1) مشتقات الدوال المثلثية

تمارين (2-1)

الإجابات النهائية

(1) $2\cos 2x$

(2) $\dfrac{sec^2\sqrt{x+1}}{2\sqrt{x+1}}$

(3) $-8x\ sin(4x^2-1)$

(4) $5(\cot 5x - 5x\ csc^2 5x)$

(5) $\dfrac{\tan x\sqrt{\sec x}}{2}$

(6) $-6\ csc^2\ 6x$

(7) $\dfrac{\sin x + 1}{cos^2\ x}$

(8) $\dfrac{2(\cos x + \cot x)}{(2+\csc x)^2}$

(9) -1

(10) -6

(11) 4

(12) 1

(13) $\dfrac{1}{4}$

(14) 0

(15) 2

(16) 2π

(17) إثبات

(18) $-\sqrt{2\pi}$

(19) $3x^2\tan x^3$

<u>خطوات الحل لبعض التمارين</u>

(8)

$$y = \frac{\sin x}{2 + \csc x}$$

$$y' = \frac{(\sin x)'(2 + \csc x) - (2 + \csc x)'(\sin x)}{(2 + \csc x)^2}$$

$$= \frac{\cos x\ \ (2 + \csc x) - (-\cot x \csc x) \sin x}{(2 + \csc x)^2}$$

$$= \frac{2\cos x + \cot x + \cot x}{(2 + \csc x)^2}$$

$$= \frac{2(\cos x + \cot x)}{(2 + \csc x)^2}$$

---

(13)

$$f(x) = \frac{\csc x}{2 + \cot x} \quad , \quad x = \frac{\pi}{2}$$

$$f'(x) = \frac{(\csc x)'(2 + \cot x) - (2 + \cot x)'(\csc x)}{(2 + cotx)^2}$$

$$= \frac{-\cot x \csc x\,(2 + \cot x) - (-csc^2 x) \csc x}{(2 + \cot x)^2}$$

$$= \frac{0 + 1}{(2)^2} = \frac{1}{4}$$

(17)

$$f'(x) = cosx - \frac{1}{3}3sin^2xcosx$$

$$= cosx - sin^2xcosx$$

$$\because sin^2x = 1 - cos^2x$$

$$\therefore f'(x) = cosx - (1 - cos^2x)cosx$$

$$= cosx - cosx + cos^3x$$

$= cos^3x$ وهو المطلوب اثباته

---

(18) $if\ f(x) = x^2 - \frac{\pi}{4},\quad g(x) = \sin x \quad ,find\ [g \circ f]'(\sqrt{\pi})$

$$\because [g \circ f]'(x) = g'[f(x)] \cdot f'(x)$$

$$g'(x) = cosx \qquad ,f'(x) = 2x$$

$$\therefore [g \circ f]'(x) = cosx(x^2 - \frac{\pi}{4}) \cdot 2x$$

$$\therefore [g \circ f]'\left(\sqrt{\pi}\right) = cosx(\pi - \frac{\pi}{4}) \cdot 2\sqrt{\pi}$$

$$[g \circ f]'\left(\sqrt{\pi}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2} \cdot 2\sqrt{\pi} = -\sqrt{2\pi}$$

الدرس (3-1) المشتقات العليا

تمارين (3 – 1)

الإجابات النهائية

(1.a) $f''(x) = 4x + 12x^{-4}$, $f'''(x) = 4 - 48x^{-5}$

(1.b) $f''(x) = 3[2\cos x - x\sin x]$

$f'''(x) = 3[-3\sin x - x\cos x]$

(1.c) $f''(x) = \dfrac{2}{x^3}$, $f'''(x) = -\dfrac{6}{x^4}$

(2) إثبات

(3) إثبات

(4) 2

(5) إثبات

(6) $3(2x\ \cos x^3 - 3x^4\ \sin x^3)$

(7) $-2\csc x \cot x$

<u>خطوات الحل لبعض التمارين</u>

(1.b) $f(x) = 3x \sin x$

$f'(x) = 3[\sin x + x \cos x]$

$f''(x) = 3[\cos x + \cos x - x \sin x]$

$= 3[2 \cos x - x \sin x]$

$f'''(x) = 3[-2 \sin x - \sin x - x \cos x]$

$= 3[-3 \sin x - x \cos x]$

----

(3) $\because\ h(x) = \cos ax - \sin ax$

$h'(x) = -a \sin ax - a \cos ax$

$h''(x) = -a^2 \cos ax + a^2 \sin ax$

$L.H.S. = h''(x) + a^2\, h(x) = -a^2 \cos ax + a^2 \sin ax + a^2(\cos ax - \sin ax)$

$= -a^2 \cos ax + a^2 \sin ax + a^2 \cos ax - a^2 \sin ax$

$= 0 = R.H.S.$

(5) $\because y = x \tan x$

$$\frac{dy}{dx} = \tan x + x \sec^2 x$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \sec^2 x + \sec^2 x + 2x\ \sec^2 x \tan x$$

$$L.H.S. = \frac{d^2y}{dx^2} = 2\sec^2 x + 2x \sec^2 x \tan x$$

$$R.H.S. = 2(1+y)\sec^2 x = 2(1 + x\tan x)\sec^2 x$$

$$= (2 + 2x\tan x)\sec^2 x$$

$$= 2\sec^2 x + 2x\sec^2 x \tan x = R.H.S.$$

---

(6) $\because\ g(x) = \sin x\ , f(x) = x^3$

$$\because [g \circ f](x) = g[f(x)]$$

$$[g \circ f](x) = \sin x^3$$

$$\therefore [g \circ f]'(x) = 3x^2 \cos x^3$$

$$[g \circ f]''(x) = 3(2x\ \cos x^3 - 3x^4\ \sin x^3)$$

اختبار الفصل 1

الإجابات النهائية

(1)	$14+\dfrac{7}{(7x-2)^2}$	(2)	$24x^2(192x^6+240x^3+68)$
(3)	$\dfrac{3}{32}$	(4)	$72x-18$
(5)	$\dfrac{4}{(4x-3)^2}$	(6)	$-\dfrac{9x}{\sqrt{(x^2+16)^3}}$
(7)	$\dfrac{3x^6+15x^4}{(x^2+3)^2}$	(8)	$-\dfrac{32(1+x)^7}{(x-3)^9}$
(9)	إثبات	(10)	إثبات
(11)	12	(12)	-48
(13)	0	(14)	0
(15)	إثبات	(16)	$-16-10\sqrt{2}$
(17)	$-\dfrac{2}{3}$	(18)	إثبات
(19)	$2\sec x^2+4x^2\sec x^2\tan x^2$	(20)	$12\sqrt{2}$

خطوات الحل لبعض التمارين

(4) $if\ f(x) = x^2 - 5x + 3, g(x) = 6x + 1 \quad , find\ [f \circ g]'(x)$

$\because [f \circ g]'(x) = f'[g(x)] \cdot g'(x)$

$f'(x) = 2x - 5 \qquad , f'(x) = 6$

$\therefore [g \circ f]'(x) = [2(6x + 1) - 5](6)$

$= 6(12x + 2 - 5)$

$= 72x - 18$

---

(9) $\because\ (y + 2)^3 = (5x - 3)^2$

$$3(y + 2)^2 \frac{dy}{dx} = 2(5x - 3)(5) = 50x - 30$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{10(5x - 3)}{3(y + 2)^2}$$

$$L.H.S. = 9(y + 2)\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = 9(y + 2)\left(\frac{10(5x - 3)}{3(y + 2)^2}\right)^2$$

$$= 9(y + 2)\frac{100(5x - 3)^2}{9(y + 2)^4}$$

$$= \frac{100(5x - 3)^2}{(y + 2)^3} \qquad , \quad \because\ (y + 2)^3 = (5x - 3)^2$$

$$9(y + 2)\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = \frac{100(5x - 3)^2}{(5x - 3)^2}$$

$$= 100 = R.H.S.$$

(10)

$$\because \; \frac{x^2}{25} - \frac{y^2}{9} = 1$$

$$\therefore \frac{2x}{25} - \frac{2y}{9}\frac{dy}{dx} = 0$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = -\frac{2x}{25} \cdot -\frac{9}{2y}$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{9x}{25y}$$

----

(15)$\because \; y = \sin^4 x - \cos^4 x$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = 4\;\sin^3 x \cos x + 4 \cos^3 x \sin x$$

$$= 4 \sin x \cos x \,(\sin^2 x + \cos^2 x)$$

$$= 4 \sin x \cos x$$

----

(18) $\because \;\; x^2 + y^2 = 4$

$$\therefore \; 2x + 2y\frac{dy}{dx} = 0$$

$$2 + 2y\frac{d^2y}{dx^2} + 2\frac{dy}{dx}\frac{dy}{dx} = 0$$

$$2 + 2y\frac{d^2y}{dx^2} + 2\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = 0$$

$$1 + y\frac{d^2y}{dx^2} + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = 0$$

الفصل 2 مخطط الفصل

الخطة الزمنية		
التدريس	المراجعة والتقييم	المجموع
(18) حصص	حصتان	(20) حصة

الدرس		الأهداف	المفردات الأساسية
الرمز	2 – 1	• إيجاد ميل المماس لمنحنى الدالة باستعمال الاشتقاق. • إيجاد معادلة المماس والعمودي لمنحنى الدالة.	ميل المستقيم – معادلة المستقيم – ميل المماس لمنحنى الدالة – ميل العمودي على منحنى الدالة – معادلة المماس لمنحنى الدالة - معادلة العمودي على منحنى الدالة
العنوان	**تطبيقات هندسية**		
عدد الحصص	(4) حصص		
الرمز	2 – 2	• إيجاد السرعة لجسم يتحرك في خط مستقيم باستعمال الاشتقاق. • إيجاد التسارع لجسم يتحرك في خط مستقيم باستعمال الاشتقاق.	السرعة والتسارع – السرعة المتوسطة – السرعة اللحظية – متوسط التسارع – التسارع اللحظي
العنوان	**تطبيقات فيزيائية**		
عدد الحصص	(4) حصص		
الرمز	2 – 3	• حل تطبيقات على المعدلات الزمنية المرتبطة باستعمال الاشتقاق.	المعدلات الزمنية المرتبطة
العنوان	**المعدلات الزمنية المرتبطة**		
عدد الحصص	(2) حصص		

الدرس		الأهداف	المفردات الأساسية
الرمز	2 – 4	• إيجاد فترات التزايد والتناقص للدالة • إيجاد النقاط الحرجة للدالة. • إيجاد النقاط العظمى والصغرى المحلية للدالة. • إيجاد نقاط الانقلاب (الانعطاف) للدالة. • إيجاد فترات تقعر منحنى الدالة إلى الأعلى وإلى الأسفل.	تزايد الدوال وتناقصها – النقاط الحرجة – النقاط العظمى والصغرى المحلية – تقعر المنحنيات – نقطة الانقلاب
العنوان	**تطبيقات المشتقة الأولى والثانية**		
عدد الحصص	(4) حصص		
الرمز	2 – 5	• تحليل سلوك دالة. • تمثيل دالة كثيرة الحدود بيانيًا باستعمال المشتقة الأولى والثانية.	دوال كثيرات الحدود
العنوان	**التمثيل البياني لمنحنيات دوال كثيرات الحدود**		
عدد الحصص	(2) حصص		
الرمز	2 – 6	• استعمال المشتقات في حل مسائل حياتية.	--------
العنوان	**تطبيقات على القيم العظمى والصغرى**		
عدد الحصص	(2) حصص		

الدرس (2-1) تطبيقات هندسية

تمارين (2-1)

الإجابات النهائية

(1) $-\frac{7}{3}$

(2) 2

(3) $\frac{1}{3}$

(4) $-\frac{1}{6}$

(5) -5

(6) $\frac{1}{4}$

(7) -1

(8) $(1,-2),(-1,2)$

(9) $\frac{\pi}{4}$

(10) $(-2.5,2)$

(11) $(-\frac{1}{2},\frac{9}{4})$

(12) $a=\frac{-5}{4}, b=5$

(13)
معادلة المماس $y-4x+4=0$
معادلة العمودي $4y+x-18=0$

(14)
معادلة المماس $3y+4x-7=0$
معادلة العمودي $4y-3x+24=0$

(15)
معادلة المماس $5y-4x-13=0$
معادلة العمودي $4y+5x+6=0$

(16)
عند النقطة $(0,0)$:
معادلة المماس $y+5x=0$
معادلة العمودي $5y-x=0$
عند النقطة $(3,12)$:
معادلة المماس $y-22x+54=0$
معادلة العمودي $22y+x-267=0$
عند النقطة $(-3,-12)$:
معادلة المماس $y-22x-54=0$
معادلة العمودي $22y+x+267=0$

(17)
معادلة المماس $y+2x-6=0$
معادلة العمودي $2y-x+8=0$

(18)
عند النقطة $(1,13)$:
معادلة العمودي $x-1=0$
عند النقطة $(2.5,6.25)$:
معادلة العمودي $2x-5=0$

(19) $a=1, b=-3, 3y-x+7=0$

(20)
معادلة المماس $5y+x+9=0$
معادلة العمودي $y-5x+7=0$

خطوات الحل لبعض التمارين

(4) $xy^3 = 2 \qquad , x = 2$

$y = (\frac{2}{x})^{\frac{1}{3}}$

$\grave{y} = \frac{1}{3}(\frac{2}{x})^{\frac{-2}{3}} \cdot (-\frac{2}{x^2})$

$= -\frac{1}{3}\left[\frac{(2)^{\frac{-2}{3}}}{(x)^{\frac{-2}{3}}} \cdot \frac{2}{x^2}\right]$

$= -\frac{1}{3}\left[\frac{2^{\frac{1}{3}}}{x^{\frac{4}{3}}}\right]$

$m = \grave{y}_{x=2} = -\frac{1}{3}\left[\frac{2^{\frac{1}{3}}}{(2)^{\frac{4}{3}}}\right]$

$= -\frac{1}{3}\left[\frac{1}{2}\right]$

$= -\frac{1}{6}$

---

(8) $f(x) = x^3 - 3x$

$\grave{f}(x) = 3x^2 - 3$

$\therefore \grave{f}(x) = 0$ بما أن المماس موازٍ للمحور x

$3x^2 - 3 = 0 \implies x = \pm 1$

$x = 1 \Rightarrow f(1) = -2 \qquad , \qquad x = -1 \Rightarrow f(-1) = 2$

إذًا مماس منحنى الدالة $f(x)$ يكون موازيًا للمحور x عند النقطتين $(1,-2), (-1,2)$

(9) $y = 2x^2 - 7x + 3 \quad , (2, -3) \quad : f(x) = y \qquad \theta = ?$

$\because f(x) = 2x^2 - 7x + 3$

$\therefore \grave{f}(x) = 4x - 7$

$\grave{f}(2) = 1$

$\grave{f}(x) = tan\theta \Longrightarrow tan\theta = 1$

$m\angle\theta = \frac{\pi}{4}$

---

(14) $x^2 - y^2 = 7 \qquad , (4, -3)$

$2x - 2y\frac{dy}{dx} = 0 \Longrightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{x}{y}$ معادلة المنحنى

$m = \frac{dy}{dx}_{(4,-3)} = \frac{-4}{3}$

$(y - y_1) = (\frac{dy}{dx})_{(x_1,y_1)}(x - x_1)$ معادلة المماس

$(y + 3) = \frac{-4}{3}(x - 4)$ بضرب الطرفين في 3

$3y + 9 = -4x + 16 \Longrightarrow 3y + 4x - 7 = 0$

ميل العمودي $= \frac{-1}{m} \Longrightarrow$ ميل العمودي $= \frac{3}{4}$

$(y - y_1) = \frac{-1}{(\frac{dy}{dx})_{(x_1,y_1)}}(x - x_1)$ معادلة العمودي

$y + 3 = \frac{3}{4}(x - 4)$ بضرب الطرفين في 3

$4y + 12 = 3x - 12 \Longrightarrow 4y - 3x + 24 = 0$

الدرس (2-2) تطبيقات هندسية

تمارين (2-2)

الإجابات النهائية

(1) $v = 2\ m/sec\ , \quad a = 2\ m/sec^2$

(2) $v = 0\ m/sec\ , \quad a = 6\ m/sec^2$

(3) $v = -21\ m/sec\ , \quad a = -18\ m/sec^2$

(4) $v = -\frac{5}{4}\ m/sec\ , \quad a = -3\ m/sec^2$

(5) $v = 11\ m/sec\ , \quad a = 2\ m/sec^2$

(6.a) $v = 3t^2 - 24t + 36$

$a = 6t - 24$

(6.b) $if\ t = 6, s = 0\ m, a = 12m/sec^2$

$if\ t = 2, s = 32\ m, a = -12\ m/sec^2$

(7.a) $v = 16\ m/sec$

$a = -32\ m/sec^2$

(7.b) $196\ m$

(8) $at\ t = 1, a = -6m/sec^2$

$at\ t = 3, a = 6m/sec^2$

خطوات الحل لبعض التمارين

(3) $s = 24 + 6t - t^3 \quad , \quad t = 3\ sec$

$v = 6 - 3t^2$

$at\ t = 3\ sec, v = 6 - 27 = -21 m/sec$

$a = -6t$

$at\ t = 3\ sec, a = -6 \times 3 = -18\ m/sec^2$

----

(6) $s = t^3 - 12t^2 + 36t$

a: $v = 3t^2 - 24t + 36$

$a = 6t - 24$

b: السكون اللحظي عندما السرعة تساوي 0

$3t^2 - 24t + 36 = 0$ بقسمة الطرفين على 3

$t^2 - 8t + 12 = 0$

$(t - 6)(t - 2) = 0$

$t = 6 \quad or \quad t = 2$

$at\ t = 6\ sec$

$s = 216 - 432 + 216 \Rightarrow s = 0\ m\ , a = 36 - 24 \Rightarrow a = 12\ m/sec^2$

$at\ t = 2\ sec$

$s = 8 - 48 + 72 \Rightarrow s = 32\ m, \quad a = 12 - 24 \Rightarrow a = -12\ m/sec^2$

(7) $s = 112t - 16t^2$

a: $v = 112 - 32t \qquad , t = 3sec$

$v = 16\, m/sec$

$a = -32 \qquad\qquad , t = 3sec$

$a = -32\, m/sec^2$

b: عند أقصى ارتفاع السرعة تساوي 0

$112 - 32t = 0$

$t = \dfrac{112}{32} \implies t = 3.5$

$s = 112(3.5) - 16(3.5)^2$

$s = 392 - 196$

$s = 196\, m$

---

(8) $s = t^3 - 6t^2 + 9t$

$v = 3t^2 - 12t + 9$

$v = 0$ عند تغير الحركة

$3t^2 - 12t + 9 = 0$ بقسمة الطرفين على 3

$t^2 - 2t + 3 = 0$

$(t-1)(t-3) = 0 \implies t = 1 \ or \ \ t = 3$

$at\ t = 1\ sec \quad , \qquad a = 6t - 12 \Rightarrow a = 6 - 12 \ \Rightarrow a = -6\, m/sec^2$

$at\ t = 3\ sec \quad , \qquad a = 6t - 12 \Rightarrow a = 18 - 12 \ \Rightarrow a = 6\, m/sec^2$

الدرس (2-3) المعدل الزمنية المرتبطة

تمارين (2-3)

الإجابات النهائية

(1) موضع النقطة عند تلك اللحظة هو $(1,-5)$

(2) **تتناقص** المساحة بمعدل $0.8\,\pi \approx 2.51 \ \text{cm}^2/\text{min}$

(3) **يزداد** الحجم بمعدل $4.8 \ \text{cm}^3/\text{sec}$

(4) **يتناقص** طول نصف قطر البالون بمعدل $\frac{3}{160\pi} \approx 0.006 \ \text{m/h}$

(5) معدل **ارتفاع** الماء في خزان يساوي $\frac{16}{25\pi} \approx 0.204 \ \text{m/min}$

(6) معدل **انخفاض** سطح الماء يساوي $0.02 \ \text{m/min}$

(7) معدل **ارتفاع** الماء في الحوض يساوي $0.06 \ \text{m/min}$

(8) سرعة **ابتعاد** الطرف الأسفل عن الحائط تساوي $\frac{8}{3} \approx 2.67 \ \text{m/sec}$

الإجابات الكاملة لبعض التمارين

(4)

بفرض أن طول نصف قطر البالون الكروي هو r بالمتر، وحجمه هو v بالمتر المكعبة.

$$\because \; v = \frac{4}{3}\pi r^3$$

وبالاشتقاق بالنسبة للزمن t

$$\therefore \; \frac{dv}{dt} = \frac{4}{3}\pi (3r^2)\frac{dr}{dt}$$

$$= 4\pi r^2 \frac{dr}{dt} \qquad , \qquad \frac{dv}{dt} = -0.3 \text{ m}^3/\text{h} \;, \; r = 2 \text{ m}$$

$$-0.3 = 4\pi (2)^2 \frac{dr}{dt}$$

$$\therefore \frac{dr}{dt} = -\frac{0.3}{16\,\pi} = \frac{3}{160\pi} - 0.006 \text{ m/h}$$

يتناقص طول نصف قطر البالون بمعدل $\frac{3}{160\pi} = 0.006 \text{ m/h}$

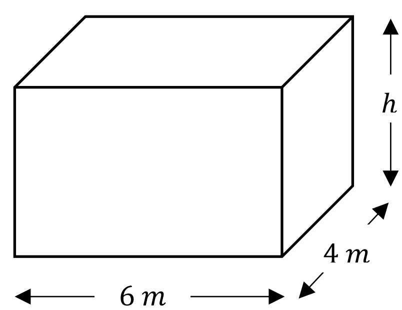
---

(6)

بفرض أن حجم الماء في الحوض هو v بالمتر المكعب، وارتفاعه عند اللحظة $t\,min$ هو h بالمتر

$$\therefore \; v = (6)(4)(h) = 24\,h$$

وبالاشتقاق بالنسبة للزمن t



$$\frac{dv}{dt} = 24\frac{dh}{dt} \qquad , \qquad \frac{dv}{dt} = -0.48 \text{ m}^3/\text{min}$$

$$-0.48 = 24\frac{dh}{dt}$$

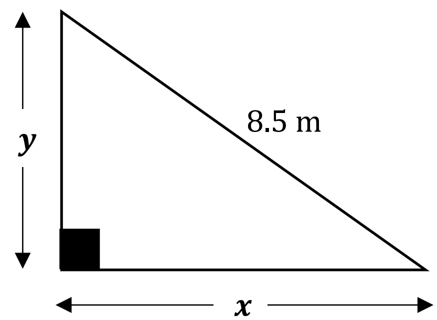
$$-\frac{0.48}{24} = \frac{dh}{dt}$$

$$\frac{dh}{dt} = -0.02 \text{ m/min}$$

معدل انخفاض سطح الماء يساوي 0.02 m/min

(8)

بفرض أن الطرف السفلي للسلم يبعد عن الحائط بعدًا قدره x بالأمتار، وارتفاع الطرف العلوي للسلم عن الأرض y بالأمتار، فتكون العلاقة بين x ، y هي



$$\because x^2 + y^2 = (8.5)^2$$

$$\therefore (7.5)^2 + y^2 = (8.5)^2$$

$$y^2 = (8.5)^2 - (7.5)^2$$

$$y = 4 \text{ m}$$

$$\because x^2 + y^2 = (8.5)^2$$

وبالاشتقاق بالنسبة للزمن t

$$2x\,\frac{dx}{dt} + 2y\,\frac{dy}{dt} = 0$$

$$x\,\frac{dx}{dt} + y\,\frac{dy}{dt} = 0 \quad , \quad \frac{dy}{dt} = -5 \text{ m/sec}$$

$$(7.5)\,\frac{dx}{dt} + (4)(-5) = 0$$

$$7.5\,\frac{dx}{dt} = 20$$

$$\frac{dx}{dt} = \frac{20}{7.5} = \frac{8}{3} = 2.67 \text{ m/sec}$$

إذن سرعة ابتعاد الطرف الأسفل عن الحائط 2.67 m/sec

الدرس (4-2) تطبيقات المشتقة الأولى والثانية

تمارين (4-2)

الإجابات النهائية

(1) النقطة الحرجة $(2,1)$ تمثل نقطة عظمى محلية.

الدالة f متزايدة في الفترة $(-\infty, 2]$، ومتناقصة في الفترة $[2, \infty)$

(2) النقطة الحرجة $(-1,2)$ تمثل نقطة عظمى محلية، والنقطة الحرجة $(2, -25)$ تمثل نقطة صغرى محلية.

الدالة f متزايدة في الفترة $(-\infty, -1] \cup [2, \infty)$، ومتناقصة في الفترة $[-1,2]$

(3) النقطة الحرجة $(0, -8)$ ليست نقطة عظمى محلية، أو نقطة صغرى محلية.

الدالة f متزايدة في R

(4) النقطة الحرجة $(2,3)$ ليست نقطة عظمى محلية، أو نقطة صغرى محلية.

الدالة f متزايدة في R

(5) النقطة الحرجة $(-2,8)$ تمثل نقطة صغرى محلية، والنقطة الحرجة $\left(-\frac{3}{2}, \frac{261}{32}\right)$ تمثل نقطة عظمى محلية، والنقطة الحرجة $(2, -24)$ تمثل نقطة صغرى محلية.

الدالة f متناقصة في الفترة $(-\infty, -2] \cup \left[-\frac{3}{2}, 2\right]$ ،

ومتزايدة في الفترة $\left[-2, -\frac{3}{2}\right] \cup [2, \infty)$

(6) $a = 1 \quad , \quad b = -6$

(7) $f(x) = -3x^2 + 12x$

(8) $a = -12 \quad , \quad b = 24$

(9) لا توجد نقطة انقلاب.

النقطة الحرجة $(2,0)$ تمثل نقطة صغرى محلية.

(10) النقطة $(1,-6)$ هي نقطة انقلاب.

منحنى الدالة f مقعر إلى أسفل في الفترة $(-\infty,1)$ ، ومنحنى الدالة f مقعر إلى أعلى في الفترة $(1,\infty)$

النقطة الحرجة $(-1,10)$ تمثل نقطة عظمى محلية، والنقطة الحرجة $(3,-22)$ تمثل نقطة صغرى محلية.

(11) النقطة $(3,0)$ هي نقطة انقلاب.

منحنى الدالة f مقعر إلى أسفل في الفترة $(-\infty,3)$ ، ومنحنى الدالة f مقعر إلى أعلى في الفترة $(3,\infty)$

النقطة الحرجة $(3,0)$ ليست نقطة عظمى محلية، أو نقطة صغرى محلية.

(12) النقطتان $(2,16)$ ، $(0,0)$ هما نقطتا انقلاب.

منحنى الدالة f مقعر إلى أسفل في الفترة $(-\infty,0) \cup (2,\infty)$ ، ومنحنى الدالة f مقعر إلى أعلى في الفترة $(0,2)$

النقطة الحرجة $(3,27)$ تمثل نقطة عظمى محلية، والنقطة الحرجة $(0,0)$ ليست نقطة عظمى محلية، أو نقطة صغرى محلية.

(13) النقطتان $\left(2,-\frac{169}{3}\right)$ ، $\left(-\frac{8}{3},-\frac{559}{81}\right)$ هما نقطتا انقلاب.

منحنى الدالة f مقعر إلى أسفل في $\left(-\frac{8}{3},2\right)$ ، ومنحنى الدالة f مقعر إلى أعلى في

$\left(-\infty,-\frac{8}{3}\right) \cup (2,\infty)$

النقطة الحرجة $\left(-1,\frac{107}{12}\right)$ نقطة عظمى محلية، والنقطة الحرجة $\left(-4,-\frac{61}{3}\right)$ نقطة صغرى محلية، والنقطة $\left(4,-\frac{317}{3}\right)$ نقطة صغرى محلية.

(14) $a = 2$, $b = -6$

(15) $a = -2$, $b = 3$, $c = 12$

الإجابات الكاملة لبعض التمارين

(5)

الدالة $f(x)$ كثيرة حدود متصلة وقابلة للاشتقاق

$$f'(x) = 2x^4 + 3x^2 - 8x - 12$$

$$f'(x) = 0 \qquad \Rightarrow \quad 2x^4 + 3x^2 - 8x - 12 = 0$$

$$(2x^4 + 3x^2) + (-8x - 12) = 0$$

$$x^2(2x + 3) - 4\,(2x + 3) = 0$$

$$(x^2 - 4)\,(2x + 3) = 0$$

$$(x + 2)\,(x - 2)\,(2x + 3) = 0$$

$$x = -2 \quad or \quad x = 2 \quad or \quad x = -\frac{3}{2}$$

النقاط الحرجة للدالة $f(x)$ هي $(2, -24)$, $\left(-\frac{3}{2}, \frac{261}{32}\right)$, $(-2,8)$

ثم ندرس إشارة $f'(x)$ حولهم

قيم x	$-\infty$ ... -2	-2 ... $-\frac{3}{2}$	$-\frac{3}{2}$ ... 2	2 ... ∞
إشارة $f'(x)$	$-$	$+$	$-$	$+$
اطراد $f(x)$	متناقصة ↘	متزايدة ↗	متناقصة ↘	متزايدة ↗

الدالة $f(x)$ متناقصة في $(-\infty, -2] \cup [-\frac{3}{2}, 2]$

ومتزايدة في $\left[-2, -\frac{3}{2}\right] \cup [2, \infty)$

(8)

$\because$ المنحنى يمر بالنقطة $(1,0)$ ، فهي تحقق معادلته

$$f(1) = 0$$

$$a(1)^3 + b(1)^2 - 12(1) = 0$$

$$a + b = 12 \dots\dots\dots (1)$$

$\because$ لمنحنى الدالة $f(x)$ نقطة حرجة عند النقطة $(1,0)$

$$\therefore\ f'(1) = 0$$

$$f'(x) = 3ax^2 + 2bx - 12$$

$$f'(1) = 3a(1)^2 + 2b(1) - 12 = 0$$

$$3a + 2b = 12 \dots\dots\dots (2)$$

◄ بضرب المعادلة (1) في -2 وجمعها مع المعادلة (2)

$$-2a - 2b + 3a + 2b = -24 + 12$$

$$\boxed{a = -12}$$

◄ بالتعويض عن قيمة a في المعادلة (1)

$$-12 + b = 12$$

$$\boxed{b = 24}$$

---

(13)

الدالة $f(x)$ كثيرة حدود متصلة وقابلة للاشتقاق

$$f'(x) = x^3 + x^2 - 16x - 16$$

$$f''(x) = 3x^2 + 2x - 16$$

$$f''(x) = 0 \qquad \rightarrow (3x + 8)(x - 2) = 0$$

$$x = -\frac{8}{3} \quad or \quad x = 2$$

$$f\left(-\frac{8}{3}\right) = -\frac{559}{81} \qquad , \qquad f(2) = -\frac{169}{3}$$

النقطتان $\left(2\,,-\frac{169}{3}\right)$ ، $\left(-\frac{8}{3}\,,-\frac{559}{81}\right)$ هما نقطتا انقلاب.

وبدراسة إشارة $f''(x)$ حول كل من $x = 2$ ، $x = -\frac{8}{3}$ كما في الجدول التالي

<u>نجد أن:</u>

منحنى الدالة f مقعر إلى أسفل في الفترة $\left(-\frac{8}{3}, 2\right)$

ومنحنى الدالة f مقعر إلى أعلى في الفترة

$(-\infty, -\frac{8}{3}) \cup (2, \infty)$ أو $R \setminus \left[-\frac{8}{3}, 2\right]$

قيم x	$-\infty$ ... $-\frac{8}{3}$	$-\frac{8}{3}$ ... 2	2 ... ∞
إشارة $f''(x)$	$+$	$-$	$+$
اتجاه تقعر منحنى $f(x)$	مقعر إلى أعلى	مقعر إلى أسفل	مقعر إلى أعلى

◄تحديد نوع النقاط الحرجة باستعمال المشتقة الثانية

$$f'(x) = x^3 + x^2 - 16x - 16$$

$$f'(x) = 0 \quad \rightarrow \quad x^2(x+1) - 16(x+1) = 0$$

$$(x+1)(x^2-16) = 0 \quad \rightarrow \quad (x+1)(x+4)(x-4) = 0$$

$$x = -1 \quad or \quad x = -4 \quad or \quad x = 4$$

$$f''(x) = 3x^2 + 2x - 16$$

$$\Rightarrow f''(-1) = 3(-1)^2 + 2(-1) - 16 = -15 < 0$$

$\therefore$ للدالة f نقطة عظمى محلية عند النقطة $\left(-1, \frac{107}{12}\right)$

$$\Rightarrow f''(-4) = 3(-4)^2 + 2(-4) - 16 = 24 > 0$$

$\therefore$ للدالة f نقطة صغرى محلية عند النقطة $\left(-4, -\frac{61}{3}\right)$

$$\Rightarrow f''(4) = 3(4)^2 + 2(4) - 16 = 40 > 0$$

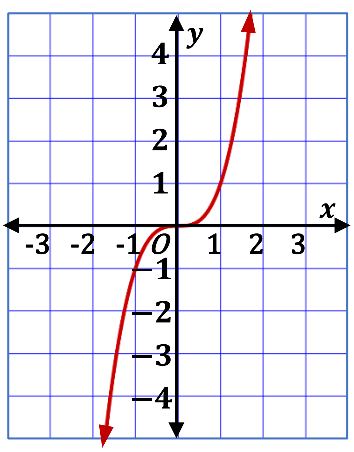
$\therefore$ للدالة f نقطة صغرى محلية عند النقطة $\left(4, -\frac{317}{3}\right)$

الدرس (2-5) التمثيل البياني لمنحنيات دوال كثيرات الحدود

تمارين (2-5)

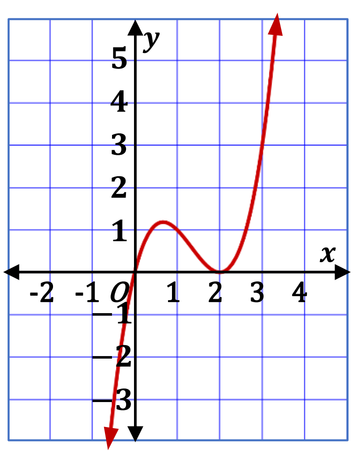
الإجابات النهائية

(1)



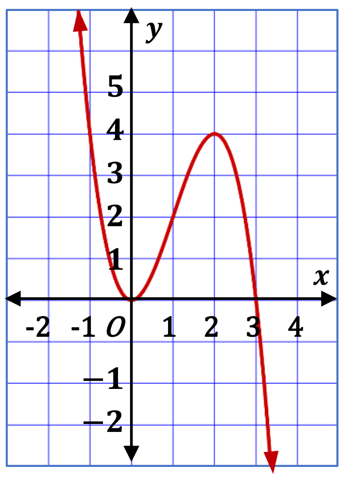
فترات التزايد	$(-\infty,\infty)$ أو R
فترات التناقص	لا توجد
النقاط العظمى المحلية	لا توجد
النقاط الصغرى المحلية	لا توجد
نقاط الانقلاب	$(0,0)$
فترات تقعر المنحنى إلى أعلى	$(0,\infty)$
فترات تقعر المنحنى إلى أسفل	$(-\infty,0)$

(2)



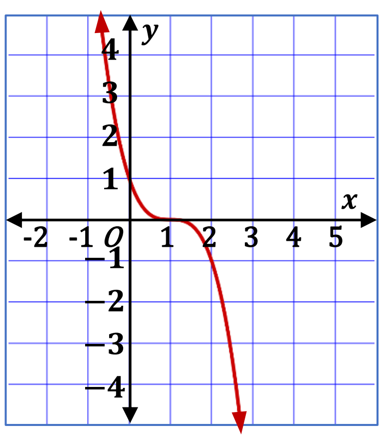
فترات التزايد	$\left(-\infty,\frac{2}{3}\right] \cup [2,\infty)$ أو $R \setminus \left(\frac{2}{3},2\right)$
فترات التناقص	$[\frac{2}{3},2]$
النقاط العظمى المحلية	$\left(\frac{2}{3},\frac{32}{27}\right)$
النقاط الصغرى المحلية	$(2,0)$
نقاط الانقلاب	$\left(\frac{4}{3},\frac{16}{27}\right)$
فترات تقعر المنحنى إلى أعلى	$\left(\frac{4}{3},\infty\right)$
فترات تقعر المنحنى إلى أسفل	$\left(-\infty,\frac{4}{3}\right)$

(3)



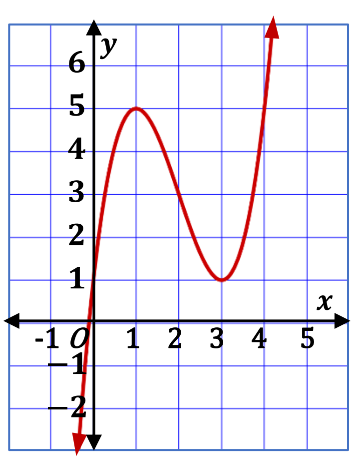
فترات التزايد	$[0,2]$
فترات التناقص	$(-\infty,0] \cup [2,\infty)$ أو $R \setminus (0,2)$
النقاط العظمى المحلية	(2.4)
النقاط الصغرى المحلية	$(0,0)$
نقاط الانقلاب	$(1,2)$
فترات تقعر المنحنى إلى أعلى	$(-\infty,1)$
فترات تقعر المنحنى إلى أسفل	$(1,\infty)$

(4)



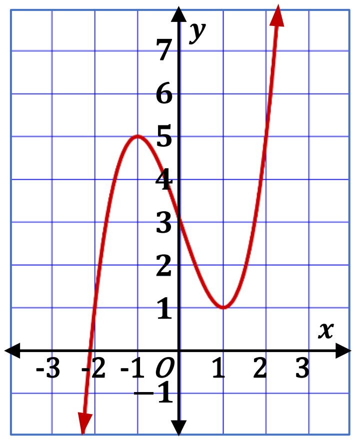
فترات التزايد	لا توجد
فترات التناقص	$(-\infty,\infty)$ أو R
النقاط العظمى المحلية	لا توجد
النقاط الصغرى المحلية	لا توجد
نقاط الانقلاب	$(1,0)$
فترات تقعر المنحنى إلى أعلى	$(-\infty,1)$
فترات تقعر المنحنى إلى أسفل	$(1,\infty)$

(5)



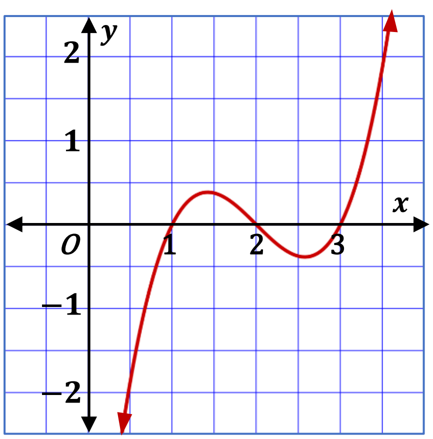
فترات التزايد	$(-\infty,1] \cup [3,\infty)$ أو $R \setminus (1,3)$
فترات التناقص	$[1,3]$
النقاط العظمى المحلية	$(1,5)$
النقاط الصغرى المحلية	$(3,1)$
نقاط الانقلاب	$(2,3)$
فترات تقعر المنحنى إلى أعلى	$(2,\infty)$
فترات تقعر المنحنى إلى أسفل	$(-\infty,2)$

(6)



فترات التزايد	$(-\infty,-1] \cup [1,\infty)$ أو $R \setminus (-1,1)$
فترات التناقص	$[-1,1]$
النقاط العظمى المحلية	$(-1,5)$
النقاط الصغرى المحلية	$(1,1)$
نقاط الانقلاب	$(0,3)$
فترات تقعر المنحنى إلى أعلى	$(0,\infty)$
فترات تقعر المنحنى إلى أسفل	$(-\infty,0)$

(7)



فترات التزايد	$(-\infty,1.4] \cup [2.6,\infty)$
فترات التناقص	$[1.4,2.6]$
النقاط العظمى المحلية	$\left(\frac{6-\sqrt{3}}{3},\frac{2\sqrt{3}}{9}\right) \approx (1.4,0.4)$
النقاط الصغرى المحلية	$\left(\frac{6+\sqrt{3}}{3},\frac{-2\sqrt{3}}{9}\right) \approx (2.6,-0.4)$
نقاط الانقلاب	$(2,0)$
فترات تقعر المنحنى إلى أعلى	$(2,\infty)$
فترات تقعر المنحنى إلى أسفل	$(-\infty,2)$

الإجابات الكاملة لبعض التمارين

(6)

$$f(x) = (x+1)^2(x-2)+5$$

$$= (x^2+2x+1)(x-2)+5$$

$$= x^3+2x^2+x-2x^2-4x-2+5$$

$$= x^3-3x+3$$

الدالة $f(x)$ كثيرة حدود متصلة وقابلة للاشتقاق

$$f'(x) = 3x^2-3 \qquad\qquad f''(x) = 6x$$

$f'(x) = 0$	$f''(x) = 0$
$3x^2-3 = 0$	$6x = 0$
$x^2 = 1$	
$x = -1 \quad or \quad x = 1$	$x = 0$

$$f(-1) = (-1)^3-3(-1)+3 = 5$$

$$f(1) = (1)^3-3(1)+3 = 1$$

$$f(0) = (0)^3-3(0)+3 = 3$$

◄ $(-1,5)$ ، $(1,3)$ نقطتان حرجتان.

◄ بدراسة إشارة $f'(x)$ و $f''(x)$ كما في الجدول المجاور:

قيم x	$-\infty$		-1		0		1		∞
إشارة $f'(x)$		$+$		$-$		$-$		$+$	
اطراد $f(x)$		متزايدة	عظمى محلية	متناقصة		متناقصة	صغرى محلية	متزايدة	
إشارة $f''(x)$			$-$				$+$		
اتجاه تقعر منحنى $f(x)$			مقعر إلى أسفل		نقطة انقلاب		مقعر إلى أعلى		

⟐ الدالة f متناقصة في الفترة $[-1,1]$ ، ومتزايدة في الفترة $R \setminus (-1,1)$ أو $(-\infty,-1] \cup [1,\infty)$.

⟐ النقطة $(-1,5)$ نقطة عظمى محلية أي أن القيمة العظمى المحلية هي (5) عندما $x = -1$

⟐ النقطة $(1,3)$ نقطة عظمى محلية أي أن القيمة الصغرى المحلية هي (3) عندما $x = 1$

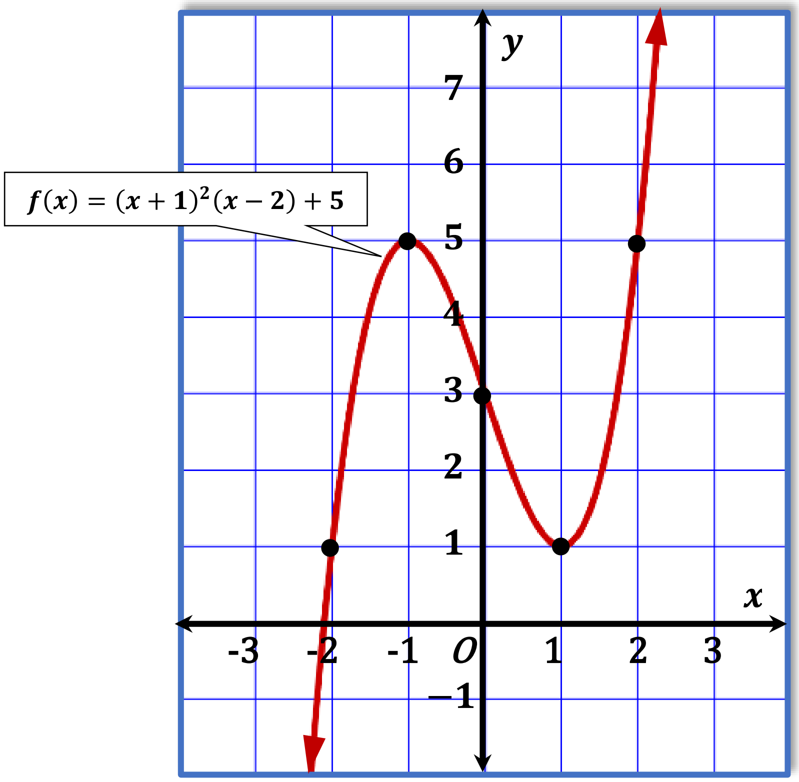
⟐ النقطة $(0,3)$ نقطة انقلاب.

⟐ منحنى الدالة مقعر إلى أعلى في الفترة $(0,\infty)$ ، ومقعر إلى أسفل في الفترة $(-\infty,0)$.

⟐ ولتمثيل منحنى الدالة f بيانيًا يمكن إيجاد نقاط مساعدة كما في الجدول أدناه:

x	-2	-1	0	1	2
$f(x)$	1	5	3	1	5

⟐ التمثيل البياني للدالة f



الدرس (2-6) تطبيقات على القيم العظمى والصغرى

تمارين (2-6)

الإجابات النهائية

(1) 1 (2) 50 , 50

(3) 5 cm , 5 cm (4) 30 m , 30 m

(5) إثبات

(6) $r(\text{نصف قطر القاعدة}) = 5\text{ cm}$, $h(\text{الإرتفاع}) = 10\text{ cm}$

(7) $r(\text{نصف قطر الدائرة}) = \dfrac{9}{\pi+4}\text{ cm} \approx 1.26\text{ cm}$,

بعدا المستطيل $\dfrac{9}{\pi+4}\text{ cm} \approx 1.26\text{ cm}$, $\dfrac{18}{\pi+4}\text{ cm} \approx 2.52\text{ cm}$

(8) a) 4 , 4 b) 8 , 2 (9) 64 cm^2

(10) تقع النقطتان M, N في منتصف $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ على الترتيب

(11) 50 cm^2 (12) $\dfrac{44}{3\pi}\text{ cm} \approx 4.67\text{ cm}$

(13)
- $v(t) = 3t^2 - 18t + 35$
- $a(t) = 6t - 18$
- $at : t = 3\ sec\ , v = 8\text{ cm/sec}$

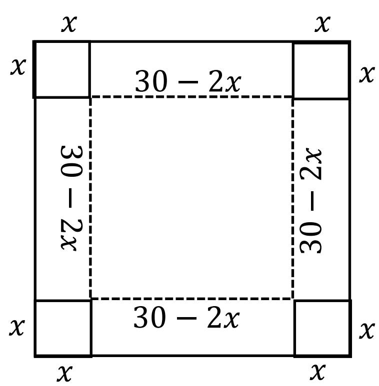
(14) 32 cm ، 24 cm (15) 5 cm , 5 cm

(16) $BH = 2\sqrt{2}\text{ cm}$, $BK = 2\sqrt{2}\text{ cm}$

(17) 15 cm (18) 4 cm , 2 cm

الإجابات الكاملة لبعض التمارين

(5)



بفرض أن طول ضلع المربع (عمق الصندوق) (x) cm.

إبعاد الصندوق $(30-2x)$ cm , $(30-2x)$ cm , (x) cm

يكون حجم الصندوق V

$$V(x) = x(30-2x)(30-2x) \quad , 0 < x < 15$$

$$= 4x^3 - 120x^2 + 900x$$

$$V'(x) = 12x^2 - 240x + 900$$

$$12x^2 - 240x + 900 = 0$$

$$x^2 - 20x + 75 = 0$$

$$(x-5)(x-15) = 0$$

$x = 5$ أو $x = 15 \notin (0,15)$ (مرفوض)

$$V''(x) = 24\,x - 240$$

$$V''(5) = 24\,(5) - 240 = -120 < 0$$

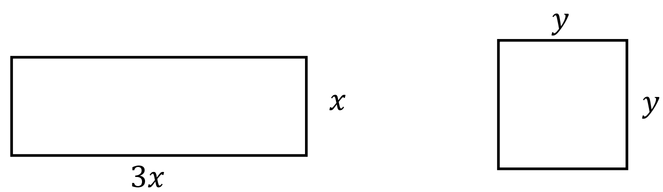
إذن حجم الصندوق $V(x)$ يكون أكبر ما يمكن (قيمة عظمى) عندما يكون عمقه 5 cm

ويكون حجم الصندوق عندئذ:

$$V = (5)(20)(20) = 2000 \text{ cm}^3$$

(14)

بفرض أن طول ضلع المربع (y) cm ، وبعدا المستطيل (x) cm , $(3x)$ cm



طول السلك = مجموع محيط المربع، ومحيط المستطيل

$$4y + 2(3x + x) = 56 \qquad \rightarrow \qquad 4y + 8x = 56$$

$$y + 2x = 14 \qquad \rightarrow \qquad y = 14 - 2x$$

مجموع مساحتي سطحي المربع والمستطيل تساوي

$$A = (y)^2 + (x)(3x)$$

$$= (14 - 2x)^2 + 3x^2 = 196 - 56x + 4x^2 + 3x^2 = 7x^2 - 56x + 196$$

تكون مساحتا سطحي المربع والمستطيل أصغر ما يمكن عندما $A'(x) = 0$

$$A\,(x) = 7x^2 - 56x + 196$$

$$A'(x) = 14x - 56$$

$$A'(x) = 0 \qquad \rightarrow \qquad 14x - 56 = 0 \qquad \rightarrow \qquad x = 4$$

$$A''(x) = 14 \qquad \rightarrow \qquad A''(4) = 14 > 0$$

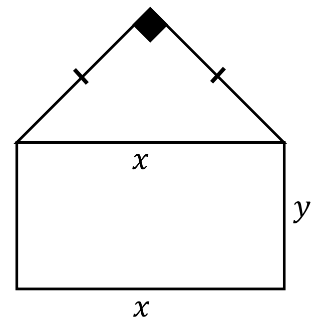
للدالة قيمة صغرى عند $x = 4$

$$y = 14 - 2(4) = 6$$

ويكون طول ضلع المربع 6 cm ، وبعدا المستطيل 12 cm , 4 cm

طول قطعتي السلك (المربعة الشكل) 24 cm ، (المستطيلة الشكل) 32 cm

(18)

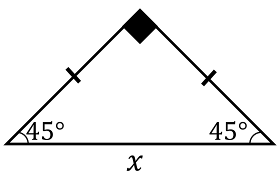


بفرض أن بعدا المستطيل (x) cm , (y) cm

$x + y = 6 \qquad \rightarrow \quad y = 6 - x$

والمثلث قائم الزاوية ومتطابق الضلعين، وطول وتره (x) cm

فيكون طول كلًا من ضلعي القائمة تساوي $\left(\frac{x\sqrt{2}}{2}\right)$ cm



◄ مساحة النافذة

$$A(x) = x(6 - x) + \frac{1}{2} \times \frac{x\sqrt{2}}{2} \times \frac{x\sqrt{2}}{2}$$

$$= 6x - x^2 + \frac{x^2}{4}$$

$$= 6x - \frac{3x^2}{4}$$

◄ دخول أكبر كمية من الضوء عند $A'(x) = 0$

$$A'(x) = 6 - 2 \times \frac{3x}{4} = 6 - \frac{3x}{2}$$

$$A'(x) = 0 \qquad \rightarrow \quad 6 - \frac{3x}{2} = 0 \qquad \rightarrow \quad x = 4$$

$$A''(x) = -\frac{3}{2} \qquad \rightarrow A''(4) = -\frac{3}{2} < 0$$

للدالة قيمة عظمى عند $x = 4$

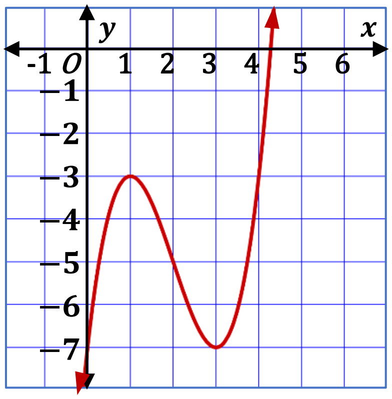
∴ بعدا المستطيل اللذان يسمحان بدخول أكبر كمية من الضوء 4 cm , 2 cm

اختبار الفصل 2

الإجابات النهائية

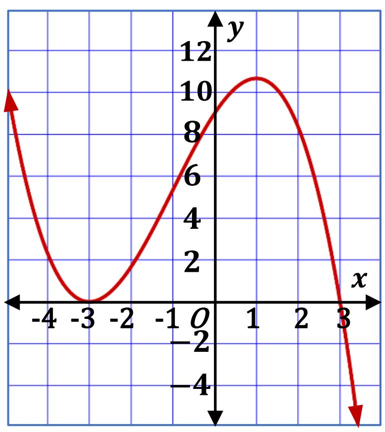
(1)	0	(2)	ميل المماس عند $x = 1$ يساوي 1 ، وعند $x = 0$ يساوي 0
(3)	$\frac{3}{4}$	(4)	$\frac{1}{2}$
(5)	-3	(6)	-2
(7)	$(-2,0)\ ,(2,0)$	(8)	$\left(\sqrt{2},-5\sqrt{2}\right)\ ,\ \left(-\sqrt{2},5\sqrt{2}\right)$
(9)	$5x-y-16=0$	(10)	معادلة المماس $3x-4y+15=0$ معادلة العمودي $4x+3y-5=0$
(11)	$6x-y-45=0$	(12)	$v=3t^2-18t+15$ $a=6t-18$
(13)	إثبات	(14)	-16
(15)	$0.06\ \mathrm{cm/sec}$	(16)	$(-2,2)\ ,\quad (2,-2)$
(17)	معدل اقتراب الرجل من قمة البرج هو $0.8\ \mathrm{m/sec}$	(18)	$1.92\ \mathrm{cm^2/min}$
(19)	$3\ \mathrm{cm^3/min}$	(20)	الزمن اللازم $210\ \mathrm{min}$ تقريبًا
(21)	$a=\frac{9}{2}\ ,\quad b=6$	(22)	$b=\pm 2$
(23)	$a=3\ ,\quad c=6$	(24)	$a=4\ ,\ b=5\ ,\ c=4$
(25)	$a=2\ ,\quad b=-3$	(26)	$a=-6\ ,\ b=-15$

(27)



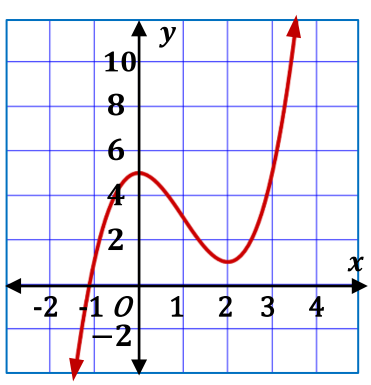
فترات التزايد	$(-\infty, 1] \cup [3, \infty)$
فترات التناقص	$[1,3]$
النقاط العظمى المحلية	$(1, -3)$
النقاط الصغرى المحلية	$(3, -7)$
نقاط الانقلاب	$(2, -5)$
فترات تقعر المنحنى إلى أعلى	$(2, \infty)$
فترات تقعر المنحنى إلى أسفل	$(-\infty, 2)$

(28)



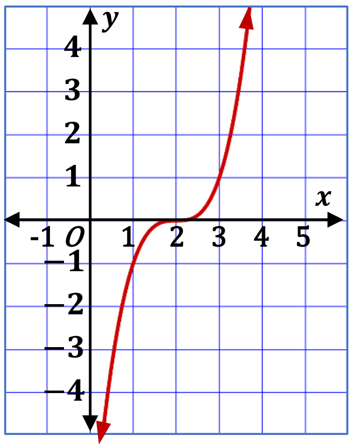
فترات التزايد	$[-3,1]$
فترات التناقص	$(-\infty, -3] \cup [1, \infty)$
النقاط العظمى المحلية	$(1, \frac{32}{3})$
النقاط الصغرى المحلية	$(-3,0)$
نقاط الانقلاب	$(-1, \frac{16}{3})$
فترات تقعر المنحنى إلى أعلى	$(-\infty, -1)$
فترات تقعر المنحنى إلى أسفل	$(-1, \infty)$

(29)



فترات التزايد	$(-\infty, 0] \cup [2, \infty)$
فترات التناقص	$[0,2]$
النقاط العظمى المحلية	$(0,5)$
النقاط الصغرى المحلية	$(2,1)$
نقاط الانقلاب	$(1,3)$
فترات تقعر المنحنى إلى أعلى	$(1, \infty)$
فترات تقعر المنحنى إلى أسفل	$(-\infty, 1)$

(30)



فترات التزايد	$(-\infty, \infty)$
فترات التناقص	لا توجد
النقاط العظمى المحلية	لا توجد
النقاط الصغرى المحلية	لا توجد
نقاط الانقلاب	$(2,0)$
فترات تقعر المنحنى إلى أعلى	$(2, \infty)$
فترات تقعر المنحنى إلى أسفل	$(-\infty, 2)$

(31) $5 \ , \ 5$

(32) $4740.74 \ \text{cm}^3$

(33) $75\pi \ \text{m}^2 \approx 235.62 \ \text{m}^2$

الإجابات الكاملة لبعض التمارين

(10)

بالتعويض عن $x = -1 , y = 3$ في معادلة المنحنى

$$x^2 + y^2 - 4x + 2y = 20$$

$$(-1)^2 + (3)^2 - 4(-1) + 2(3) \stackrel{?}{=} 20$$

$$20 \stackrel{\surd}{=} 20$$

إذن النقطة $(-1,3)$ تقع على المنحنى $x^2 + y^2 - 4x + 2y = 20$

بالاشتقاق بالنسبة إلى x

$$2x + 2y\left(\frac{dy}{dx}\right) - 4 + 2\left(\frac{dy}{dx}\right) = 0 \quad \rightarrow \quad x + y\left(\frac{dy}{dx}\right) - 2 + \left(\frac{dy}{dx}\right) = 0$$

$$(y+1)\frac{dy}{dx} = 2 - x \qquad \rightarrow \qquad \frac{dy}{dx} = \frac{2-x}{y+1}$$

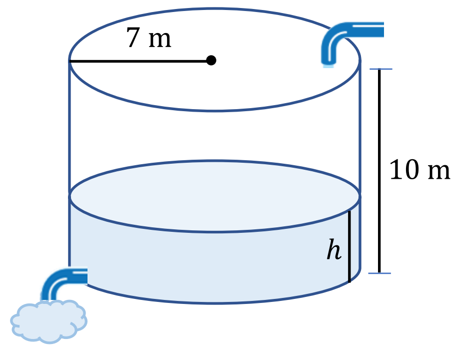
$$m = \left(\frac{dy}{dx}\right)_{(-1,3)} = \frac{2-(-1)}{3+1} = \frac{3}{4}$$

معادلة المماس هي	معادلة العمودي هي
$y - y_1 = m\,(x - x_1)$	$y - y_1 = \frac{-1}{m}\,(x - x_1)$
$y - 3 = \frac{3}{4}\,(x+1)$	$y - 3 = \frac{-4}{3}\,(x+1)$
$4y - 12 = 3x + 3$	$3y - 9 = -4x - 4$
$3x - 4y - 15 = 0$	$4x + 3y - 5 = 0$

(20)

معدل زيادة حجم الماء في الخزان يساوي

$$\frac{dV}{dt} = 9 - \frac{5}{3} = \frac{22}{3} \ \ \mathrm{m^3/min}$$



$$V = \pi r^2 h \qquad \rightarrow V = \frac{22}{7} \times 7^2 \times h$$

$$V = 154\, h$$

بالاشتقاق بالنسبة إلى الزمن t

$$\frac{dV}{dt} = 154 \frac{dh}{dt}$$

$$\frac{22}{3} = 154 \frac{dh}{dt}$$

$$\frac{dh}{dt} = \frac{1}{21} = 0.0476 \ \mathrm{m^3/min}$$

◄ معدل ارتفاع الماء داخل الخزان عند أي لحظة هو $0.0476 \ \mathrm{m^3/min}$

t min هو الزمن الذي يمضي حتى يصبح حجم الماء داخل الخزان مساويًا لحجمه V

حجم الخزان $V = \pi r^2 h = 49\,\pi \times 10 \approx 1540 \ \mathrm{m^3}$

الزمن اللازم $t = V \div \frac{dV}{dt}$

$$= 1540 \div \frac{22}{3} = 210 \ \mathrm{min}$$

◄ الزمن الذي يمضي حتى يصبح حجم الماء داخل الخزان مساويًا لحجمه هو 210 min تقريبًا

(26)

$$f(x) = x^3 + ax^2 + bx$$

$$f'(x) = 3x^2 + 2ax + b$$

$$f''(x) = 6x + 2a$$

$\because$ لمنحنى الدالة $f(x)$ نقطة حرجة عند $x = -1$

$$\therefore \quad f'(-1) = 0$$

$$3(-1)^2 + 2a(-1) + b = 0$$

$3 - 2a + b = 0 \qquad \rightarrow \boxed{-2a + b = -3}$ -------------- (1)

$\because$ لمنحنى الدالة $f(x)$ نقطة انقلاب عند $x = 2$

$$\therefore f''(2) = 0$$

$$6(2) + 2a = 0 \qquad \rightarrow \qquad 12 + 2a = 0$$

$$\boxed{a = -6}$$

بالتعويض في المعادلة (1) عن $a = -6$

$$-2a + b = -3$$

$$-2(-6) + b = -3 \qquad \rightarrow \qquad b = -3 - 12$$

$$\boxed{b = -15}$$

(33)

بفرض أن طول نصف قطر قاعدة الأسطوانة m $(\boldsymbol{r})$ ، وارتفاعها m $(\boldsymbol{h})$

◄ حجم الوعاء (الأسطوانة الدائرية القائمة)

$$V = \pi r^2 h$$

$$125\pi = \pi r^2 h \qquad \rightarrow \qquad 125 = r^2 h$$

$$h = \frac{125}{r^2}$$

◄ مساحة الوعاء (الأسطوانة الدائرية القائمة بدون غطاء)

$$A = 2\pi r h + \pi r^2$$

$$A = 2\pi r\left(\frac{125}{r^2}\right) + \pi r^2 \qquad \rightarrow \qquad A = \frac{250\pi}{r} + \pi r^2$$

◄ أقل مقدار من المعدن اللازم لصنع الوعاء يكون عند $A'(r) = 0$

$$A'(r) = -\frac{250\pi}{r^2} + 2\pi r$$

$$A'(x) = 0 \qquad \rightarrow \qquad -\frac{250\pi}{r^2} + 2\pi r = 0$$

$$\frac{250\pi}{r^2} = 2\pi r \qquad \rightarrow \quad r^3 = 125 \qquad \rightarrow \quad \boldsymbol{r = 5}$$

$$A''(r) = \frac{500\pi}{r^3} + 2\pi \qquad \rightarrow A''(5) = 6\pi > 0$$

للدالة قيمة صغرى عند $r = 5$

$$A(r) = \frac{250\pi}{r} + \pi r^2$$

$$A(5) = \frac{250\pi}{(5)} + \pi(5)^2 = 75\pi \text{ m}^2 \approx 235.62 \text{ m}^2$$

أقل مقدار من المعدن اللازم لصنع الوعاء يساوي $\boldsymbol{235.62\ \mathrm{m}^2}$ تقريبًا

الفصل 3

مخطط الفصل

الخطة الزمنية		
التدريس	المراجعة والتقييم	المجموع
(9) حصص	حصتان	(11) حصة

الدرس		الأهداف	المفردات الأساسية
الرمز	3 – 1	• إيجاد مجموعة الدوال الأصلية لدالة متصلة.	الدالة الأصلية – عكس المشتقة
العنوان	**العلاقة بين التفاضل والتكامل**		
عدد الحصص	حصة واحدة		
الرمز	3 – 2	• إيجاد التكامل غير المحدد للدوال المتصلة. • إيجاد تكامل الدوال المثلثية.	التكامل غير المحدد – ثابت التكامل
العنوان	**التكامل غير المحدد**		
عدد الحصص	(3) حصص		
الرمز	3 – 3	• إيجاد قاعدة دالة عُلمت مشتقتها الأولى ونقطة يمر بها منحناها باستعمال التكامل غير المحدد. • إيجاد السرعة والمسافة باستعمال التكامل غير المحدد.	--------
العنوان	**تطبيقات على التكامل غير المحدد**		
عدد الحصص	(4) حصص		

الدرس (2 – 3) التكامل غير المحدد

تمارين (2 – 3)

الإجابات النهائية

(1)	$x^5 + x^3 - 2x^2 + 7x + C$	(14)	$\frac{25}{6}\sqrt{(x^3+7)^6} + C$
(2)	$\frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{2}x^2 - \frac{2}{3}x^3 - 2x + C$	(15)	$-\frac{1}{4(x^2-3x+1)^4} + C$
(3)	$\frac{3}{5}x^5 + x^4 + C$	(16)	$-\frac{1}{3}\cos 3u + C$
(4)	$-\frac{1}{x} + \frac{1}{2}x^2 + C$	(17)	$\frac{1}{2}\sin 2x + C$
(5)	$\frac{2}{3}\sqrt{x^3} + C$	(18)	$-\frac{1}{5}\cot^5 x + C$
(6)	$\frac{2}{5}\sqrt{x^5} + \frac{4}{3}\sqrt{x^3} + C$	(19)	$\frac{3}{4}\sqrt{(\sin x - 5)^3} + C$
(7)	$\frac{3}{4}(x-2)^{\frac{4}{3}} + C$	(20)	$-\frac{1}{3}\cos^3 x + C$
(8)	$\frac{2}{9}\sqrt{(3x+1)^3} + C$	(21)	$\tan x - x + C$
(9)	$\frac{1}{2}x^2 - 9x + C$	(22)	$\frac{1}{2}tan^2x + C \quad or \quad \frac{1}{2}sec^2x + C$
(10)	$\frac{1}{8}(x^2+12)^4 + C$	(23)	$5x + C$
(11)	$\frac{1}{3}\sqrt{(x^2+14x-1)^3} + C$	(24)	$x - \frac{1}{2}\cos 2x + C$
(12)	$2\sqrt{1-2x} + C$	(25)	$\frac{1}{8}\sin^4 2x + C$
(13)	$\frac{1}{28}(x^4+1)^7 + C$	(26)	$-\csc x + C$

خطوات الحل لبعض التمارين

(6)

$$\int \sqrt{x}(x+2)\,dx = \int x^{\frac{1}{2}}(x+2)\,dx$$

$$= \int x^{\frac{3}{2}} + 2x^{\frac{1}{2}}\ \,dx$$

$$= \frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}} + \frac{4}{3}x^{\frac{3}{2}} + C$$

$$= \frac{2}{5}\sqrt{x^5} + \frac{4}{3}\sqrt{x^3} + C$$

---

(12)

$$\int \frac{-2}{\sqrt{1-2x}}\,dx = \int -2\,(1-2x)^{-\frac{1}{2}}\,dx$$

$$= \int -2\,(1-2x)^{-\frac{1}{2}}\,dx$$

$$= \frac{(1-2x)^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} + C$$

$$= 2\sqrt{1-2x} + C$$

(17)

$$\int (2\cos^2 x - 1)\, dx = \int \cos 2x \; dx = \frac{1}{2}\sin 2x + C$$

---

(22)

$$\int (\tan^3 x + \tan x)\, dx = \int \tan x\,(\tan^2 x + 1)\, dx$$

$$\int \tan x\,(\sec^2 x)\, dx$$

$$= \frac{1}{2} tan^2 x + C$$

طريقة حل آخرى:'

$$\int (\tan^3 x + \tan x)\, dx = \int \tan x\,(\tan^2 x + 1)\, dx$$

$$\int \tan x\,(\sec^2 x)\, dx$$

$$\int \tan x \sec x\,(\sec x)\, dx$$

$$= \frac{1}{2} sec^2 x + C$$

الدرس (3 – 3) تطبيقات على التكامل غير المحدد

تمارين (3 – 3)

الإجابات النهائية

(1)	$y = x^3 - x^2 + x + 4$	(10)	$S = t^2 + 5t$
(2)	$y = 5x^3 - \frac{1}{4}x^4 + 7$	(11)	$S = \frac{1}{3}t^3 - 2t^2 - 5t + \frac{26}{3}$
(3)	$y = -\frac{1}{4}(4-x)^4 - 2$	(12)	$S = \sin t - \cos t$
(4)	$y = -\frac{3}{4}\cos^4 x + \frac{7}{4}$	(13)	$S = \frac{-4}{t-3} - \frac{4}{3}$
(5)	$y = \tan x - \sqrt{3}$	(14)	$v = 3t^2 + 2t,\ \ S = t^3 + t^2$
(6)	$y = \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 - 6x - 4$	(15)	$v = (1+2t)^4, S = \frac{(1+2t)^5}{10} + 2.9$
(7)	$y = x^3 - 5x^2 + 7x - 3$	(16)	$v = t - 2t^2, S = \frac{1}{2}t^2 - \frac{2}{3}t^3 + 5$
(8)	$y = -x^2 + 6x - 3$	(17)	$v = t - \sin t\,, S = \frac{1}{2}t^2 + \cos t$
(9)	$y = x^3 - 3x - 2$	(18)	$v = 3t + 2t^2 + 8, S = 98\frac{2}{3}\ cm$

خطوات الحل لبعض التمارين

(6) $f'(x) = (x-2)(x+3)$ $\quad , P(0,-4)$

$$= x^2 + 3x - 2x - 6 = x^2 + x - 6$$

$$y = \int x^2 + x - 6 \quad dx$$

$$y = \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 - 6x + C$$

المنحنى المطلوب إيجاد معادلته يمر بالنقطة $(0,-4)$

$$\therefore -4 = 0 + C \Longrightarrow C = -4$$

$y = \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 - 6x - 4$ معادلة المنحنى

---

(9)

بما أن للدالة قيمة صغرى محلية

$$\therefore \frac{dy}{dx} = 3x^2 - 3 = 0$$

$$x^2 = 1 \, , x = \pm 1$$

نوجد المشتقة الثانية لتحديد النقطة التي توجد عندها قيمة صغرى محلية

$$\frac{d^2y}{dx^2} = 6x$$

$$At\ x = 1\ ,\ \ \frac{d^2y}{dx^2} = 6\ > 0$$

$$, At\ x = -1\ ,\ \ \frac{d^2y}{dx^2} = -6\ < 0$$

إذن للدالة قيمة صغرى محلية عندما $x = 1$

$$y = \int 3x^2 - 3 \quad dx$$

$$y = x^3 - 3x + C$$

المنحنى المطلوب إيجاد معادلته يمر بالنقطة $(1, -4)$

$$\therefore -4 = 1 - 3 + C \Longrightarrow C = -2$$

$y = x^3 - 3x - 2$ معادلة المنحنى

(18) $v = \int a \; dt \quad , a = 3 + 4t$

$$v = \int (3 + 4t) \; dt$$

$$v = 3t + 2t^2 + C \quad , \quad v = 8 \text{ cm/ sec} \quad at \;\; t = 0$$

$$8 = 3(0) + 2(0)^2 + C \quad \Rightarrow c = 8$$

$$v = 3t + 2t^2 + 8$$

$$S = \int \; v \; dt \quad , v = 3t + 2t^2$$

$$= \int 3t + 2t^2 + 8 \quad dt$$

$$= \frac{3}{2}t^2 + \frac{2}{3}t^3 + 8t + C \quad , S = 0 \quad at \;\; t = 0 \quad \Rightarrow C = 0$$

$$S = \frac{3}{2}t^2 + \frac{2}{3}t^3 + 8t \quad , \quad t = 4 \; sec$$

$$S_{t=4\;sec} = \frac{3}{2}(4)^2 + \frac{2}{3}(4)^3 + 8(4)$$

$$= 98\frac{2}{3} \;\; cm$$

اختبار الفصل

الإجابات النهائية

(1)	$x^5 - 2x^4 + x^3 + C$	(16)	$\tan x + C$
(2)	$\frac{1}{8}(x-4)^8 + C$	(17)	$\frac{1}{2}\sin 2x + x + C$
(3)	$3\sqrt{(x^2+12)^2} + C$	(18)	$\tan x + x + C$
(4)	$-\frac{5}{4}\left(1+\frac{1}{x}\right)^4 + C$	(19)	$\sin x - \cos x + C$
(5)	$-\frac{1}{x+3} + C$	(20)	$-\frac{7}{3}\cos 3t + C$
(6)	$x + C$	(21)	$\frac{1}{8}\sin 4x + \frac{1}{2}x + C$
(7)	$\frac{1}{3}\tan^3 x - \tan x + C$	(22)	$y = x^2 + x - \frac{3}{4}$
(8)	$\sin x \cos x + C$	(23)	$y = \frac{2}{3}\sqrt{x^3} - \frac{7}{3}$
(9)	$\cot x - \csc x + C$	(24)	$y = x + \frac{1}{x} - 1$
(10)	$\sec x + C$	(25)	$f(x) = -\cot x + 3$
(11)	$\frac{7}{3}x^3 + 2x^2 - 3x + C$	(26)	$y = 2x^3 - 2x^2 + 3x + 7$
(12)	$\frac{1}{2}x^2 - x + C$	(27)	$f(x) = \frac{2}{3}x^3 - 4x$
(13)	$(x^2+1)^6 + C$	(28)	$S = 160\ m\ , v = 112\ m/sec$
(14)	$\frac{7}{4}\sqrt[3]{(3x^2-5)^2} + C$	(29)	$S = 184\ m$
(15)	$-\frac{1}{2}\cot^2 x + C\ Or\ -\frac{1}{2}\csc^2 x + C$	(30)	$S = 2\pi - 3\sqrt{3}\ \ m$

خطوات الحل لبعض التمارين

(5)

$$\int \frac{dx}{x^2+6x+9}$$

$$= \int \frac{dx}{(x+3)^2}$$

$$= \int (x+3)^{-2}\ dx$$

$$= -\frac{1}{x+3} + C$$

---

(21)

$$\because f(x) = \cos^2 x\ , g(x) = 2x$$

$$\therefore \int [f \circ g](x)\ dx = \int f[g(x)]\ dx$$

$$= \int f[2x]\ dx$$

$$= \int \cos^2 2x\ dx$$

$$\because \cos 2\theta = 2\cos^2\theta - 1$$

$$2\cos^2\theta = \cos 2\theta + 1$$

$$\cos^2\theta = \frac{1}{2}\cos 2\theta + \frac{1}{2}$$

$$\therefore \cos^2 2x = \frac{1}{2}\cos 4x + \frac{1}{2}$$

$$\int [f \circ g](x)\ dx = \int (\cos^2 2x)\ dx = \int \left(\frac{1}{2}\cos 4x + \frac{1}{2}\right) dx$$

$$= \frac{1}{8}\sin 4x + \frac{1}{2}x + C$$

(27)

$$f'(x) = kx^2 - 4 \quad , \qquad\qquad P_1(0,0), P_2(3,6)$$

$$= \int kx^2 - 4 \quad dx$$

$$= k\left(\frac{x^3}{3}\right) - 4x + \mathrm{C} \qquad\qquad (1)$$

$\because$ النقطة $(0,0)$ تقع على منحنى هذه الدالة

$\therefore$ النقطة $(0,0)$ تحقق المعادلة (1)

$$\therefore 0 = 0 - 0 + C \qquad \Rightarrow c = 0$$

كذلك النقطة $(3,6)$ *تحقق المعادلة* (1)

$$\therefore 6 = 9k - 12 \ + C$$

بالتعويض عن قيمة C

$$\therefore 6 = 9k - 12 \ + 0 \qquad\qquad \Rightarrow k = 2$$

$\therefore$ معادلة المنحنى

$$f(x) = \frac{2}{3}x^3 - 4x$$

الفصل 4 مخطط الفصل

الخطة الزمنية		
التدريس	المراجعة والتقييم	المجموع
(10) حصص	حصتان	(12) حصة

الدرس		الأهداف	المفردات الأساسية
الرمز	4 – 1	• حساب التكامل المحدد للدوال باستعمال النظرية الأساسية في حساب التفاضل والتكامل. • تطبيق خواص التكامل المحدد في حساب التكاملات.	التكامل المحدد
العنوان	**النظرية الأساسية في التفاضل والتكامل**		
عدد الحصص	(3) حصص		
الرمز	4 – 2	• حساب المساحات باستعمال التكامل المحدد.	----------
العنوان	**تطبيقات هندسية على التكامل المحدد**		
عدد الحصص	(3) حصص		
الرمز	4 – 3	• إيجاد التكامل المحدد لبعض الدوال.	التكامل بالتعويض
العنوان	**التكامل بالتعويض**		
عدد الحصص	(4) حصص		

الدرس (1 – 4) النظرية الأساسية فى التفاضل والتكامل

تمارين (1 – 4)

الإجابات النهائية

(1)	-2
(2)	$\frac{17}{6}$
(3)	24
(4)	10
(5)	$\frac{14}{3}$
(6)	3276.8
(7)	1
(8)	$\frac{1}{4}$
(9)	$\frac{7}{3}$
(10)	$\frac{3}{4}$
(11)	$\frac{4}{3}$

خطوات الحل لبعض التمارين

(1)

$$\int_0^1 (8x^3 - 9x^2 - 1)\ dx$$

$$= (2x^4 - 3x^3 - x)\Big|_0^1$$

$$= (2 - 3 - 1) - (0)$$

$$= -2$$

----

(3)

$$\int_0^4 x^2\,|x-2|\,dx$$

$$f(x) = \begin{cases} -x^3 + 2x^2\ , & 0 \le x \le 2 \\ x^3 - 2x^2\ \ , & 2 < x \le 4 \end{cases}$$

$$\int_0^4 x^2\,|x-2|\,dx = \int_0^2 f(x)\ dx + \int_2^4 f(x)\ dx$$

$$= \int_0^2 (-x^3 + 2x^2)\ dx + \int_2^4 (x^3 - 2x^2)\ dx$$

$$= \left(-\frac{1}{4}x^4 + \frac{2}{3}x^3\right)\Big|_0^2 + \left(\frac{1}{4}x^4 - \frac{2}{3}x^3\right)\Big|_2^4$$

$$= \left(\left(-\frac{16}{4} + \frac{16}{3}\right) - (0)\right) + \left(\left(\frac{256}{4} - \frac{128}{3}\right) - \left(\frac{16}{4} - \frac{16}{3}\right)\right)$$

$$= \ 24$$

---

(10)

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin x}{\cos^5 x} \quad dx$$

$$= -\int_0^{\frac{\pi}{4}} -\sin x \cos^{-5} x \quad dx$$

$$= -\left(\frac{\cos^{-4} x}{-4}\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{4}}$$

$$= \left(\frac{\sec^4 x}{4}\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{4}}$$

$$= \left(\frac{4}{4} - \frac{1}{4}\right)$$

$$= \frac{3}{4}$$

الدرس (2 – 4) تطبيقات هندسية على التكامل المحدد

تمارين (2 – 4)

الإجابات النهائية

(1) $\frac{4}{3}$ وحدة مربعة

(2) $\frac{32}{3}$ وحدة مربعة

(3) 2 وحدة مربعة

(4) $\frac{2\sqrt{3}}{3}$ وحدة مربعة

(5) 4 وحدة مربعة

(6) $\frac{64}{3}$ وحدة مربعة

(7) $2\sqrt{2}$ وحدة مربعة

(8) $\frac{32}{3}$ وحدة مربعة

(9) $\frac{1}{2}$ وحدة مربعة

(10) $k = -4$ أو

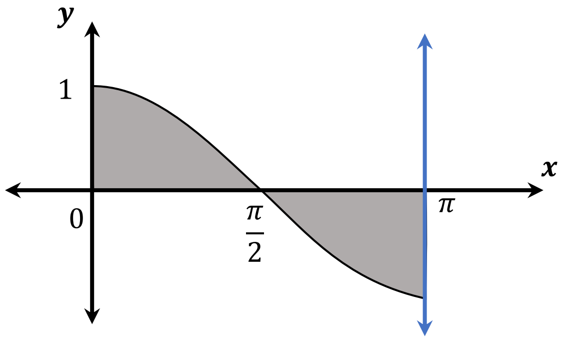
$k = -54$

<u>خطوات الحل لبعض التمارين</u>

(3)

نوجد نقاط تقاطع منحنى $f(x)$ مع المحور x في الفترة $[0,\pi]$

$$\cos x = 0 \Rightarrow x = \frac{\pi}{2}$$



إذن نقطة التقاطع هي $\left(\frac{\pi}{2}, 0\right)$.

$$\therefore A = \left|\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)\ dx\right| + \left|\int_{\frac{\pi}{2}}^{0} f(x)\ dx\right|$$

$$= \left|\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x\ dx\right| + \left|\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \cos x\ dx\right|$$

$$= \left|\sin x \Big|_0^{\frac{\pi}{2}}\right| + \left|\sin x \Big|_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\right|$$

$$= \left|\sin\frac{\pi}{2} - \sin 0\right| + \left|\sin\pi - \sin\frac{\pi}{2}\right|$$

$$= |1-0| + |0-1|$$

$= 1 + 1 = 2$ وحدة مربعة

(9)

نوجد نقاط تقاطع المنحنيين:

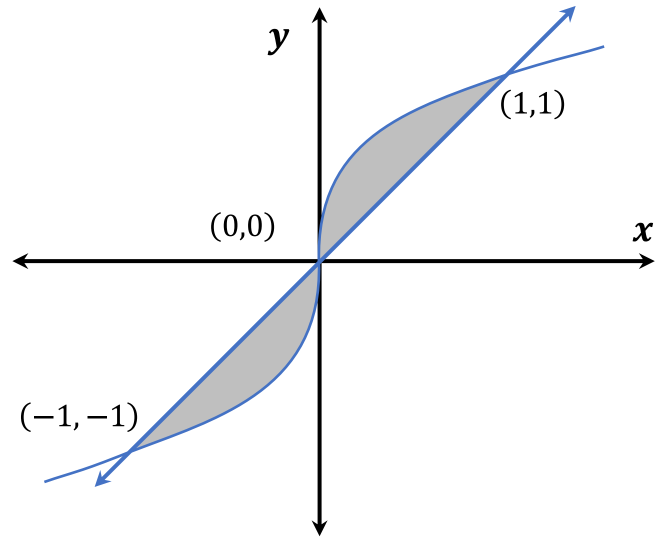
$\because x = \sqrt[3]{x}$

$\Rightarrow x^3 = x$

$\Rightarrow x^3 - x = 0$

$\Rightarrow x(x^2 - 1) = 0$

$\Rightarrow x = 0\, , x = 1, x = -1$



إذن نقاط التقاطع هي: $(-1,-1), (0,0), (1,1)$

$$\therefore A = \left|\int_{-1}^{0} f(x)\ dx\right| + \left|\int_{0}^{1} f(x)\ dx\right|$$

$$= \left|\int_{-1}^{0} \left(x^{\frac{1}{3}} - x\right)\ dx\right| + \left|\int_{0}^{1} \left(x^{\frac{1}{3}} - x\right)\ dx\right|$$

$$= \left|\frac{3}{4}x^{\frac{4}{3}} - \frac{1}{2}x^2 \Big|_{-1}^{0}\right| + \left|\frac{3}{4}x^{\frac{4}{3}} - \frac{1}{2}x^2 \Big|_{0}^{1}\right|$$

$$= \left|0 - \frac{3}{4} + \frac{1}{2}\right| + \left|\frac{3}{4} - \frac{1}{2} - 0\right|$$

$$= \left|-\frac{1}{4}\right| + \left|\frac{1}{4}\right|$$

$$= \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$$ وحدة مربعة

الدرس (3 – 4) التكامل بالتعويض

تمارين (3 – 4)

الإجابات النهائية

(1) $\frac{9\pi}{4}$

(2) $\frac{4\pi - 3\sqrt{3}}{18}$

(3) $\frac{\pi}{6}$

(4) $\frac{\pi}{6} + \frac{\sqrt{3} - 2}{2}$

(5) $2\sqrt{3} - \frac{2\pi}{3}$

(6) $\frac{\pi}{80}$

(7) $\frac{64}{27} - \frac{64\sqrt{3}}{243}$

(8) $\frac{\pi}{18}$

(9) $\frac{14\sqrt{3}}{405}$

خطوات الحل لبعض التمارين

(9) $\int_{\frac{1}{3}}^{\frac{2}{3}} x^3\sqrt{9x^2-1}\ \ dx$

$$x=\frac{1}{3}\sec\theta$$

$$dx=\frac{1}{3}\sec\theta\tan\theta\ d\theta$$

$$at\ x=\frac{1}{3}\Rightarrow\theta=0$$

$$at\ x=\frac{2}{3}\Rightarrow\theta=\frac{\pi}{3}$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{3}}\frac{1}{27}\sec^3\theta\cdot\sqrt{\sec^2\theta-1}\ \ \cdot\frac{1}{3}\sec\theta\tan\theta\ d\theta$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{3}}\frac{1}{81}\sec^4\theta\tan^2\theta\ d\theta$$

$$=\frac{1}{81}\int_0^{\frac{\pi}{3}}\sec^2\theta\sec^2\theta\tan^2\theta\ d\theta$$

$$=\frac{1}{81}\int_0^{\frac{\pi}{3}}(1+\tan^2\theta)\sec^2\theta\tan^2\theta\ d\theta$$

$$=\frac{1}{81}\int_0^{\frac{\pi}{3}}\sec^2\theta\tan^2\theta\ d\theta+\frac{1}{81}\int_0^{\frac{\pi}{3}}\sec^2\theta\tan^4\theta\ d\theta$$

$$=\frac{1}{81}\left(\frac{\tan^3\theta}{3}\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{3}}+\frac{1}{81}\left(\frac{\tan^5\theta}{5}\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{3}}$$

$$=\frac{1}{81}\left(\frac{3\sqrt{3}}{3}\right)+\frac{1}{81}\left(\frac{9\sqrt{3}}{5}\right)=\frac{14\sqrt{3}}{405}$$

اختبار الفصل

الإجابات النهائية

(1)	$\frac{128}{7}$	(11)	$\frac{\pi+1}{2}$	(21)	9 وحدة مربعة
(2)	$\frac{\sqrt{2}}{12}$	(12)	$\frac{3}{2}$	(22)	$\frac{\pi}{16}$
(3)	$\frac{\sqrt{3}}{4}$	(13)	$\sqrt{2}$	(23)	$\sqrt{3}-\frac{\pi}{3}$
(4)	$\frac{1}{7}$	(14)	اثبات	(24)	$\frac{\pi}{4}$
(5)	10	(15)	$b=\frac{\pi}{2}$	(25)	$\frac{1-\sqrt{2}}{2}$
(6)	$\frac{26}{3}$	(16)	$b=4$	(26)	$\frac{25\pi}{12}-\frac{25\sqrt{3}}{8}$
(7)	-4	(17)	$n=2$	(27)	$\frac{2-\sqrt{2}}{3}$
(8)	$\frac{13}{3}$	(18)	$\frac{16}{3}$ وحدة مربعة	(28)	$\frac{25\pi}{2}-25$
(9)	$\frac{8}{3}$	(19)	1 وحدة مربعة	(29)	$\frac{2\sqrt{3}}{3}-\frac{\pi}{6}$
(10)	1	(20)	$\frac{32}{3}$ وحدة مربعة	(30)	$3-\frac{3\pi}{4}$

خطوات الحل لبعض التمارين

(3)

$$\int_{1}^{4} \frac{1}{x^2}\sqrt{1-\frac{1}{x}}\ dx$$

$$\int_{1}^{4} x^{-2}(1-x^{-1})^{\frac{1}{2}}\ dx$$

$$=\left[\frac{2}{3}\left(1-\frac{1}{x}\right)^{\frac{3}{2}}\right]\begin{matrix}4\\|\\1\end{matrix}$$

$$=\frac{2}{3}\left(1-\frac{1}{4}\right)^{\frac{3}{2}}-\frac{2}{3}\left(1-\frac{1}{1}\right)^{\frac{3}{2}}$$

$$=\frac{\sqrt{3}}{4}-0=\frac{\sqrt{3}}{4}$$

----

(12)

$$\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin 4z}{\cos 2z}\ dz=\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{2\ \sin 2z\ \cos 2z}{\cos 2z}\ dz$$

$$=\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} 2\ \sin 2z\ dz$$

$$= -(\cos 2z)\Big|_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}$$

$$= -\left(-1 - \frac{1}{2}\right)$$

$$= \frac{3}{2}$$

---

(24)

$$x = \sqrt{2}\sin\theta$$

$$dx = \sqrt{2}\cos\theta \ d\theta$$

$$at \ x = 0 \Rightarrow \theta = 0$$

$$at \ x = 1 \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{4}$$

$$= \int_{0}^{1} \frac{1}{\sqrt{2 - x^2}} \, dx$$

$$= \int_{0}^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\sqrt{2 - 2\sin^2\theta}} \cdot \sqrt{2}\, cos\, \theta \, d\theta$$

$$= \int_{0}^{\frac{\pi}{4}} 1 \, d\theta$$

$$= (\theta)\Big|_{0}^{\frac{\pi}{4}}$$

$$= \frac{\pi}{4}$$